Übungsblatt 10

1. **Gradient, Divergenz, Rotation und Nabla-Identitäten**

(a) Gegeben seien das Skalarfeld $f(x, y, z) = y^{-1}\cos(z)$ und die Vektorfelder $\vec{A}(x, y, z) = \left(-y, x, z^2\right)^T$ und $\vec{B}(x, y, z) = (x, 0, 1)^T$. Berechnen Sie ∇f, $\nabla \cdot \vec{A}$, $\nabla \times \vec{A}$, $\nabla \cdot \vec{B}$, $\nabla \times \vec{B}$.

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für ein *allgemeines* Skalarfeld $f(x, y, z)$ und *allgemeine* Vektorfelder $\vec{A}(x, y, z)$ und $\vec{B}(x, y, z)$ (mittels Indexnotation, d.h. ohne $\vec{A}$, $\vec{B}$ und ∇ als Spaltenvektoren darzustellen):

(i) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

(ii) $\nabla \times (f\vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$

(iii) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$

(iv) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{wobei} \quad \nabla^2 = (\nabla \cdot \nabla)$

Anmerkung: Für jede Identität wird vorausgesetzt, dass die Felder hinreichend oft differenzierbar sind.

2. **Gradient für** $f(r)$

(a) Für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{r}|$, berechnen Sie ∇r und ∇r^2.

(b) $f(r)$ sei eine allgemeine, zweimal differenzierbare Funktion von r. Berechnen Sie $\nabla f(r)$, ausgedrückt durch $f'(r)$, die erste Ableitung von f nach r.

3. **Geschwindigkeit und Beschleunigung**

Gegeben sei die Bahnkurve $\gamma = \{\vec{r}(t)\,|\, t \in [-\infty, \infty]\}$, $\vec{r}(t) = (e^{-t^2}, ae^{t^2})^T \in \mathbb{R}^2$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$ ($0 < a < 1$ für (c)).

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}(t)$. Lässt sich $\vec{r}(t)$ durch $\dot{\vec{r}}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$ ausdrücken?

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter t durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Bahnkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$. Finden Sie die Zeit $t(a)$, bei der $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$ gilt.