WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 19.12.2022
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Übungsblatt 11

---

1. **Durch Kurven begrenzte Fläche**

Gegeben seien die Kurve $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, b(1-\frac{t}{a}))^T$ sowie die geschlossene Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (a\cos t, b\sin t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die von γ_2 umschlossene Fläche $S(a, b)$. [Kontrollergebnis: $S(1, 1) = \pi$.]

(c) Die Kurve γ_1 teilt die von γ_2 umschlossene Fläche in zwei Teile. Bestimmen Sie die Fläche $A(a, b)$ des kleineren Teilstücks mittels Berechnung eines Flächenintegrals. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geometrischen Überlegung.

2. **Linienintegral eines Vektorfeldes**

Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ des Vektorfelds $\vec{F}(\vec{r}) = (xe^{yz}, ye^{xz}, ze^{xy})^T$ entlang der *geraden* Strecke γ vom Punkt $\vec{0} = (0, 0, 0)^T$ zum Punkt $\vec{b} = a(1, 2, 1)^T$, mit $a \in \mathbb{R}$. [Kontrollergebnis: für $a^2 = \ln 2$ ist $W[\gamma] = 7/2$.]

3. **Linienintegral**

Das Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters hat die Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{c}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\nabla \times \vec{B} = 0$ gilt, falls $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \int_{\gamma_K} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.

(c) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_R] = \int_{\gamma_R} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$ für den geschlossenen Weg γ_R entlang den Kanten des Rechtecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)^T$, $(2, 0, 0)^T$, $(2, 3, 0)^T$ und $(1, 3, 0)^T$. [*Hinweis:* $\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + C$]