WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 09.01.2023
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Übungsblatt 12

---

1. **Satz von Gauß**

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} z \\ x^2 + z^2 \\ x\,z \end{pmatrix},$$

und überprüfen Sie den (Integral-) Satz von Gauß,

$$\int_V \mathrm{d}V\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}S\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}). \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie hierzu zuerst das Volumenintegral auf der linken Seite von Gleichung (1), wobei Sie als Integrationsvolumen einen um den Ursprung zentrierten Würfel mit Seitenlänge 2 wählen (der also die Punkte $\vec{r}$ mit $-1 \leq x, y, z \leq 1$ umfasst).

(b) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1), indem Sie alle sechs Oberflächenintegrale ausführen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teil (a).

2. **Aharonov-Bohm Effekt**

Der Aharonov-Bohm Effekt ist ein quantenmechanischer Interferenzeffekt. Der Welle-Teilchen-Dualismus erlaubt es, ein Elektron als eine Welle zu verstehen. Wenn Elektronenwellen aufeinandertreffen, kommt es im Allgemeinen zu Interferenz. Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz von einem Magnetfeld beeinflusst das von der Elektronenwelle räumlich getrennt ist.

Das Magnetfeld $\vec{B}$ wird in der Elektrodynamik als Rotation eines "Eichfelds" (oder "Vektorpotentials") $\vec{A}(\vec{r})$ beschrieben,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}).$$

Betrachten Sie im Folgenden das statische Eichfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ an Orten $\vec{r}$ außerhalb der z-Achse (also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ oder $x, y \neq 0$).

(b) Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz einer elektronischen Welle, die sich entlang eines geschlossenen Weges $\mathcal{C}$ bewegt (also z.B. im Kreis) durch den "magnetischen Fluss" Φ bestimmt, der durch die Elektronenbahn eingeschlossen wird. Dieser ist das Integral des magnetischen Feldes über die vom Weg eingeschlossene Fläche. Betrachten Sie nun eine Elektronenwelle, die sich entlang eines Kreisringes mit Radius 1 um die z-Achse in der (xy)-Ebene bewegt (also bei $z = 0$). Berechnen Sie den magnetischen Fluss

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

durch eine Kreisscheibe mit Radius 1 um die z-Achse in der (xy)-Ebene, also bei $z = 0$, mit Hilfe des Satzes von Stokes. Stehen dieses Ergebnis im Widerspruch zu Aufgabenteil (a)? *Hinweis:* Nutzen Sie wieder das am besten passenden Koordinatensystem für die Berechnung des Integrals. Wählen Sie den Normalenvektor der Fläche als in positive z-Richtung zeigend.

3. **Trennung der Variablen**

Eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung heißt 'autonom', wenn sie die Form $\dot{x} = f(x)$ hat, also die rechte Seite zeitunabhängig ist [nicht-autonom wäre $\dot{x} = f(x,t)$]. Solche Gleichungen können mit Trennung der Variablen gelöst werden.

(a) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ für zwei verschiedene Randbedingungen: (i) $x(0) = 1$ und (ii) $x(2) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $x(-2) = \frac{1}{3}$, und (ii) $x(2) = -1$.]

(b) Skizzieren Sie die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich, dass Ihre Skizzen für die Funktion $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.