Ausgabe: 23.01.2023

# Übungsblatt 14

1. **Diagonalisierung von komplexen $2 \times 2$ Matrizen**

Finden Sie für folgende komplexe Matrizen die Eigenwerte $\lambda_j$ und normierten Eigenvektoren $\vec{v}_j$:

(a) $A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

2. **Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion**

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, gegeben durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x+2\pi) = f(x)$. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $c_n$ in der Darstellung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$. Wie wählen wir $L$? Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$, sowie die Summe der $n = 1$ und $n = -1$ Terme der Fourier-Reihe (d.h. der erste Term der entsprechenden Sinus-Reihe).

3. **Parseval Theorem**

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. In der Fourier-Darstellung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ lauten die Fourier-Koeffizienten $c_n = i(-1)^n/n$ ($n \neq 0$) (siehe Aufgabe 2). Beweisen Sie die berühmte Identität $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basler Problem), indem Sie das Integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2$ einerseits direkt berechnen und andererseits mittels der Parseval-Identität durch die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ ausdrücken.