Ausgabe: 31.10.2022

Übungsblatt 4

1. **Drehmatrizen in zwei Dimensionen**

In zwei Dimensionen wird die Drehung um den Winkel θ durch die Drehmatrix

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Geben Sie die Matrix D_{θ_i} für die Winkel $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$ und $\theta_4 = \pi$ an. Berechnen Sie die Wirkung der D_{θ_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$.

(b) Die Verknüpfung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Zeigen Sie, dass $D_\theta D_\phi = D_{\theta+\phi}$.

(c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $\vec{v} = (a, b)^T$ die Drehung um einen Winkel θ die Länge nicht ändert, d.h., dass $\vec{w} = D_\theta \vec{v}$ den gleichen Betrag hat wie $\vec{v}$.

2. **Diagonalisierung einer symmetrischen 3×3 Matrix**

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_j und die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec{v}_j$ folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **Diagonalisierung einer 2×2 Matrix**

Finden Sie für folgende reelle Matrix die Eigenwerte λ_j, Eigenvektoren $\vec{v}_j$ und die Ähnlichkeitstransformation S sowie deren Inverse, S^{-1}, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass $S^{-1}AS$ auf der Diagonalen die Eigenwerte enthält.