
Übungsblatt 5

1. Ableitung

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| (a) | $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ | (b) | $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$ |
| (c) | $f(x) = e^x(2x - 3)$ | (d) | $f(x) = x \sin\left[\pi\left(x + \frac{1}{6}\right)\right]$ |
| (e) | $f(x) = \sin^2(\pi x)$ | (f) | $f(x) = \tan(x)$ |
| (g) | $f(x) = x \ln x$ | (h) | $f(x) = x \ln(9x^2)$ |
| (i) | $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ | (j) | $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |

2. Ableitung als Grenzwert

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung als

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

folgende Gleichungen durch das explizite Bilden des Grenzwerts $\Delta x \rightarrow 0$.

- (a)
- $$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}.$$
- (b)
- $$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}.$$

3. Totales Differential

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{\cos(2x)y}{z^2}.$$

Bestimmen Sie das totale Differential

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials an der Stelle $x = 1, y = 2, z = -2$ eine Näherung für die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle $x = 1, y = 2, z = -2$ zur Stelle $x = 0.9, y = 2.1, z = -2.1$. Wie groß ist die exakte Änderung?