WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 14.11.2022
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Übungsblatt 6

1. **Taylor-Entwicklungen**

Taylor-entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\sin(x)$, $\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ um $x = 0$, bis einschließlich vierter Ordnung.

(b) $g(x) = \sin(\ln(x))$ um $x = 1$, bis einschließlich zweiter Ordnung.

2. **Exponential einer Matrix**

Gegeben sei die 2×2 symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Berechnen Sie e^A mittels Taylor-Entwicklung. *Hinweis*: Da $A^2 \propto \mathbb{1}$, gilt $A^{2m} \propto \mathbb{1}$, $A^{2m+1} \propto A$, und die Taylor-Reihe e^A hat die Form $f_0\mathbb{1} + f_1 A$.

(b) Sei U die orthogonale Matrix die A diagonalisiert, mit Diagonalmatrix

$$\Lambda = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$e^A = Ue^\Lambda U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Berechnen Sie e^A nun mittels Diagonalisierung.

3. **Extremwerte einer Funktion mit zwei Variablen**

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}. Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f$.

(b) Finden Sie die Extremwerte der Funktion.