

---

## Übungsblatt 8

---

### 1. Zweidimensionale Integration

Berechnen Sie das Flächenintegral  $I = \int_G dx dy f(x, y)$  der Funktion  $f(x, y) = xy$  über dem Gebiet  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1; 1 \leq x \leq 2 - y\}$ .

### 2. Massendichte eines Würfels

Wir betrachten einen Würfel der Kantenlänge  $2a$ . Der Würfel habe in seinem Inneren eine Massendichte  $\rho(\vec{r}) = \rho_0 \vec{r}^2$ . Der Würfel liege so, dass eine Ecke bei  $\vec{r} = (-a, -a, -a)^T$  liegt und eine andere Ecke bei  $\vec{r} = (a, a, a)^T$ .

*Hinweis:* Wenn der Würfel parallel zu den Koordinatenachsen liegt, gilt

$$\int_{\text{Würfel}} dV = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz,$$

wobei das Innere des Würfels  $x$ -Koordinaten zwischen  $x_1$  und  $x_2$ ,  $y$ -Koordinaten zwischen  $y_1$  und  $y_2$  und  $z$ -Koordinaten zwischen  $z_1$  und  $z_2$  hat. Weiterhin löst man ein Mehrfachintegral der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz f(x) g(y) h(z)$$

über das Produkt der Einzelintegrale,

$$\left( \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \right) \cdot \left( \int_{y_1}^{y_2} dy g(y) \right) \cdot \left( \int_{z_1}^{z_2} dz h(z) \right).$$

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse  $M$  des Würfels durch Integration der Massendichte,

$$M = \int_{\text{Würfel}} dV \rho(\vec{r}).$$

(b) Bestimmen Sie nun die Koordinate des Schwerpunkts  $\vec{R}$ . Dieser ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Würfel}} dV \rho(\vec{r}) \vec{r}}{\int_{\text{Würfel}} dV \rho(\vec{r})}.$$

(c) Berechnen Sie nun noch das Trägheitsmoment des Würfels für eine Drehung um die  $z$ -Achse, das durch

$$I_z = \int_{\text{Würfel}} dV \rho(\vec{r}) ((x - R_x)^2 + (y - R_y)^2)$$

gegeben ist.

### 3. Koordinatentransformation

Der Punkt  $P_1$  hat Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/6, 2\pi/3)$ . Wie lauten seine kartesischen und Zylinderkoordinaten,  $(x, y, z)$  bzw.  $(\rho, \varphi, z)$ ? Der Punkt  $P_2$  hat Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z) = (4, \pi/4, 2)$ . Wie lauten seine kartesischen und Kugelkoordinaten? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)