WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 05.12.2022
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Übungsblatt 9

---

1. **Jacobi-Determinante**

Berechnen Sie die Jacobi-Determinanten für die Transformationen (a) von kartesischen zu Zylinderkoordinaten bzw. (b) von kartesischen zu Kugelkoordinaten.

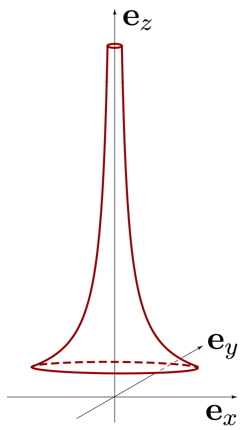
2. **Flächenintegral: hyperbolischer Rotationskörper (Gabriel's Horn)**

Der Körpers K werde durch die Rotation der Funktion $\rho(z) = 1/z$ mit $1 \le z \le a$ um die z-Achse erzeugt. Solch ein Körper ist als Gabriels Horn oder Torricellis Trompete bekannt.

(a) Berechnen Sie das Volumen, $V(a)$, des Körpers K. [Kontrollergebnis: $V(2) = \frac{\pi}{2}$.]

(b) Wie groß ist das Volumen im Limes $a \to \infty$?

Hinweis: Nutzen Sie die Zylinderkoordinaten!



3. **Gaußsches Integral**

Bestimmen Sie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, e^{-\alpha x^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\, \alpha > 0),$$

indem Sie zunächst das Quadrat des Integrals in Polarkoordinaten berechnen.

4. **Allgemeine Gauß-Integrale**

Mehrfach-Gauß-Integrale sind Integrale der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n \, e^{-\mathbf{r}^T A \mathbf{r}} \, ,$$

wobei $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und die reelle Matrix A symmetrisch und positiv-definit ist (d.h. alle Eigenwerte von A sind > 0). Die kennzeichnende Eigenschaft dieser Klasse von Integralen ist, dass der Exponent eine 'quadratische Form', d.h. eine *quadratische* Funktion aller Integrationsvariablen ist. In der Regel enthält diese Funktion Mischterme, aber diese können mittels einer Basistransformation beseitigt werden: Sei O

die Ähnlichkeitstransformation, die A diagonalisiert, sodass $D = O^T A O$ diagonal ist, mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da A symmetrisch ist, ist O orthogonal, mit $O^{-1} = O^T$ und $\det O = \pm 1$. Sei nun $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ definiert durch $\tilde{\mathbf{r}} = O^T \mathbf{r}$, dann gilt

$$\mathbf{r}^T A \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}^T O^T A O \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}^T D\, \tilde{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \, . \tag{1}$$

Ausgedrückt durch die neuen Variablen $\tilde{\mathbf{r}}$ enthält der Exponent folglich keine Mischterme mehr, sodass das Gauß-Integral durch die Variablensubstitution $\mathbf{r} = O\tilde{\mathbf{r}}$ gelöst werden:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n \, e^{-\mathbf{r}^T A \mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}_n \, J \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_n (\tilde{x}_i)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \cdots \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} \, .$$

Dabei haben wir die folgende Tatsache genutzt: Da $\partial x_i / \partial \tilde{x}_j = O_{i,j}$, ist die Jacobi-Determinante der Variablentransformation gleich der Determinante von O und somit gleich 1:

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_n} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} O_{11} & \cdots & O_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ O_{n1} & \cdots & O_{nn} \end{pmatrix} \right| = |\det O| = 1 \, .$$

Benutzen Sie nun obige Strategie, um folgendes Integral zu berechnen:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, e^{-(4x^2 - 4xy + 4y^2)} \, .$$

Führen Sie alle Schritte der obigen Argumentation explizit durch:

(a) Schreiben Sie den Exponenten in der Form $-\mathbf{r}^T A \mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und A symmetrisch. Identifizieren und diagonalisieren Sie die Matrix A. Schreiben Sie insbesondere die Gleichung (1) für den aktuellen Fall explizit auf.

(b) Was ist der Wert des Gauß-Integrals?