

2 Grundbegriffe

5

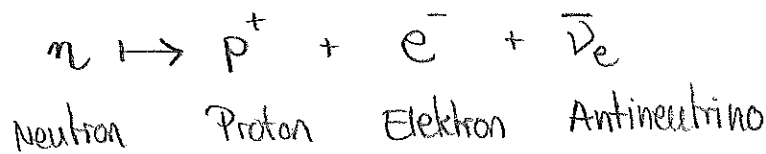
2.1 Ladung und Ladungsdichte

Eigenschaften (Ladung):

(a) Es existieren zwei Arten von elektrischer Ladung, die wir als „positiv“ und „negativ“ bezeichnen.

(b) Die Ladung eines abgeschlossenen Systems von Teilchen bleibt erhalten („globale Ladungserhaltung“).

Beispiel (Betazerfall):



Bemerkung:

Es gilt sogar lokale Ladungserhaltung, beschrieben durch Kontinuitätsgleichung (Kapitel 3)

(c) Die Ladung ist quantisiert:

$$q = Z e \quad , \quad Z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

mit der Elementarladung $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (exakt).

Beispiele:

$$Z = \begin{cases} -1 & \text{Elektron} \\ +1 & \text{Proton} \\ 0 & \text{Neutron} \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Für makroskopische Phänomene kann Quantisierung typischerweise vernachlässigt werden
- Quarks haben fraktionale Ladung $q = \pm \frac{e}{3}, \pm \frac{2e}{3}$, aber konnten bisher nie isoliert beobachtet werden („Confinement“)

Beispiel (Proton):

$$p = d + 2u$$

Proton	Down-Quark	Up-Quark
$q = +e$	$q = -\frac{1}{3}e$	$q = \frac{2}{3}e$

- Quantisierung der elektrischen Ladung phänomenologische Tatsache, theoretische Begründung ungeklärt („Dirac-Monopole“)

Definition (Ladungsdichte):

Die Raumladungsdichte $S(\vec{r}, t)$ beschreibt eine elektrische Ladung $dq(t)$ im Volumenelement dV um Ort \vec{r} zur Zeit t , wobei:

$$S(\vec{r}, t) := \frac{dq(t)}{dV} \quad (\text{Quotient!})$$

Gesamtladung im Volumen V :

$$q(t) = \int_V dq(t) = \int_V dV S(\vec{r}, t)$$

Beispiel (Punktladung am Ort \vec{r}_0):

$$\text{Ladungsdichte } \rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \infty & \text{für } \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}$$

$$\text{Gesamtladung } q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

Geschlossene Form:

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Bemerkung (Systeme von Punktladungen):

Ladungsdichte von N Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

↑ ↑
Ladungen Orte

Definition (Flächenladungsdichte):

$$\sigma(\vec{r}, t) := \frac{dq(t)}{dS} \quad (\text{Ladung pro Flächenelement } dS)$$

Definition (Linienladungsdichte):

$$\lambda(\vec{r}, t) := \frac{dq(t)}{d\ell} \quad (\text{Ladung pro Linienelement } d\ell)$$

2.2 Strom und Stromdichte

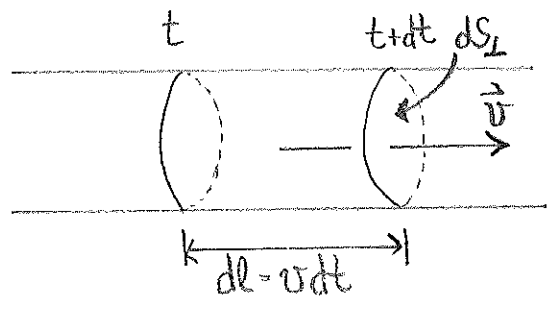
Definition (Stromdichte):

Der Stromdichtevektor $\vec{j}(\vec{r}, t)$ beschreibt einen elektrischen Strom, der sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ bewegt und bei dem die Ladung dq im Zeitintervall dt durch die senkrecht zu \vec{v} liegende Fläche dS_{\perp} hindurchtritt, mit

$$\vec{j}(\vec{r}, t) := \frac{dq(t)}{dt \cdot dS_{\perp}} \frac{\vec{v}(\vec{r}, t)}{|\vec{v}(\vec{r}, t)|} \quad (\text{Quotient!})$$

Zusammenhang Stromdichte und Ladungsdichte:

Röhre parallel zu \vec{v} mit infinitesimalem Querschnitt dS_{\perp} :



Stromdichte:

$$|\vec{j}| = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} = \frac{\rho dV}{dt dS_{\perp}} = \frac{\rho dS_{\perp} dl}{dt dS_{\perp}} = \rho v$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

Beispiel (bewegte Punktladung mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$):

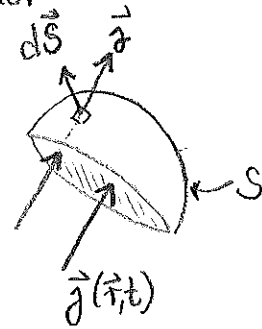
(9)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

Definition (Strom):

Die Stromstärke I_S durch eine Fläche S ist

$$I_S(t) := \int_S \vec{dS} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$



Zusammenfassung:

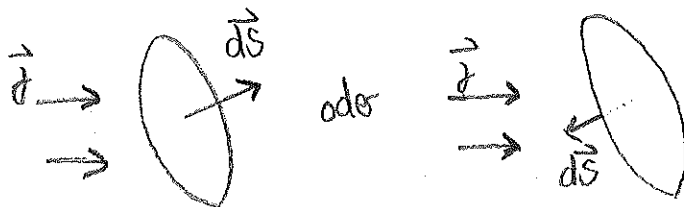
- Strom durch infinitesimales Oberflächenelement $d\vec{S}$:

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \, dS \cos \alpha(\vec{j}, d\vec{S})$$

$$= j \, dS_{\perp} = \frac{dq}{dt} \, dS_{\perp}$$

$$= \frac{dq}{dt} \quad \text{"Ladung pro Zeit"}$$

- Vorzeichen von I_S von Richtung von $d\vec{S}$ abhängig



2.3 Elektrische Felder

10

Definition (elektrische Feldstärke):

Die elektrische Feldstärke ist Kraft \vec{F} pro Ladungseinheit auf ruhende Probeladung Q ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) := \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{Q}$$

Bemerkungen:

- Begriff der Probeladung Idealisierung (keine Ausdehnung, keine Rückwirkung auf Feld)
- Feldstärke durch Vektorfeld $E(\vec{r}, t)$ beschrieben

Beispiel (elektrisches Feld einer Punktladung):

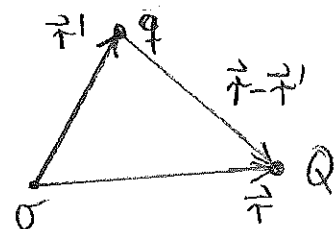
Kraft, die ruhende Punktladung q am Ort \vec{r}' auf Probeladung Q am Ort \vec{r} ausübt:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q Q \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

"Coulombs-Gesetz"

mit $\epsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

"Permittivität des Vakuums"



Elektrisches Feld der Punktladung:

11

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Bemerkungen:

- Feld unabhängig von Probeladung Q (gilt allgemein!)
- Für elektrisches Feld von mehreren Ladungen gilt

Superpositionsprinzip:

Kraft von q_1 auf Q

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} = \frac{\vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{F}_2(\vec{r}) + \dots}{Q} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} + \dots\end{aligned}$$

Beispiel (elektrisches Feld einer Ladungsverteilung):

Beschreiben Ladungsverteilung als unendliche Summe von Punktladungen:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Elektrisches Feld:

$$\begin{aligned}E(\vec{r}) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \Bigg| \quad 1 = \int d^3\vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \\ &= \sum_i \int d^3\vec{r}' \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)}_{\text{Beiträge nur für } \vec{r}' = \vec{r}_i} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} q_i \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i) \\
 & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \underbrace{\sum_i q_i \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)}_{= \rho(\vec{r}')}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

Bemerkung:

Analog ergibt sich das elektrische Feld einer Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dS' \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

und einer Linienladungsdichte $\lambda(\vec{r})$:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dl' \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

2.4 Magnetische Felder

(13)

Definition (magnetische Flussdichte):

Erfährt eine ruhende Probeladung Q keine, eine mit Geschwindigkeit \vec{v} sich bewegende Probeladung Q jedoch eine in der Form

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = Q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

darstellbare Kraft, so ist $\vec{B}(\vec{r}, t)$ die magnetische Flussdichte.

Bemerkungen:

- $B(\vec{r}, t)$ wie $\vec{E}(\vec{r}, t)$ Vektorfeld
- Definition von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ unabhängig von \vec{v} (Experiment!)
- Gesamtkraft auf bewegte Ladung Q in elektromagnetischem Feld:

$$\vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{E}) \quad \text{verallg. Lorentzkraft}$$

- \vec{E} und \vec{B} haben von Existenz einer Probeladung unabhängige Bedeutung, können Energie, Impuls und Drehimpuls tragen (Kap. 3)

2.5 Elektromagnetische Einheiten

(14)

Internationales Einheitensystem (SI, mksA-System):

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$
- Lorentz-Kraft: $\vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
- Ladung: $[Q] = 1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$
- Elektrisches Feld: $[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \text{kg m s}^{-3} \text{ A}^{-1}$
- Magnetische Flussdichte: $[B] = \frac{\text{N s}}{\text{C m}} = \text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$

Gaußsches Einheitensystem (cgs-System):

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$
- Lorentz-Kraft: $\vec{F} = Q (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$
- Ladung: $[Q] = \sqrt{[F]} [r] = \text{g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$
- Elektrisches Feld: $[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$
- Magnetische Flussdichte: $[B] = [E] = \text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$

→ sinnvoll für relativistische Formulierung der Elektrodynamik