

4 Elektrostatik

4.1 Methoden der Feldberechnung

4.1.1 Poisson-Gleichung

Definition (Elektrostatik):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \vec{B} = 0$$

Bestimmungsgleichung für skalares Potential:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad \text{„Poisson-Gleichung“}$$

Lösungsstrategien:

(A) Methode der Green'schen Funktion

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung $\Delta \varphi_0 = 0$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Gleichung $\Delta \varphi_G = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ für Punktladung $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\varphi_G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{„Green'sche Funktion“}$$

$$\text{Beweis: } \Delta \varphi_G = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \checkmark \quad (\text{Übung 4})$$

Allgemeine Lösung:

(40)

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \varphi_G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{S(\vec{r}')}{q} + \varphi_0(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{S(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \varphi_0(\vec{r})\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \underbrace{\Delta\varphi_G(\vec{r}, \vec{r}')}_{= -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{S(\vec{r}')}{q} + \underbrace{\Delta\varphi_0(\vec{r})}_{= 0} = -\frac{1}{\epsilon_0} S(\vec{r}) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Elektrisches Feld:

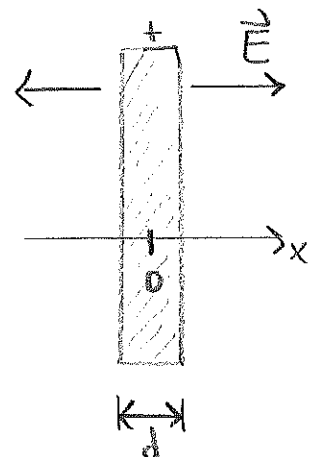
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{S(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \vec{E}_0(\vec{r})$$

(3) Symmetrieansatz:

Beispiel (homogen geladene Platte):

$$\text{Ladungsdichte: } S(\vec{r}) = S(x) = S_0 \Theta\left(\frac{d}{2} - |x|\right)$$

$$\text{Ansatz: } \varphi(\vec{r}) = \varphi(x)$$



Poisson-Gleichung:

(41)

$$\varphi''(x) = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad \left| x \mapsto x' \right| \int_0^x dx' (\cdot)$$

$$\underbrace{\varphi'(x)}_{-E(x)} - \underbrace{\varphi'(0)}_{-E(0)=0} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \underbrace{\int_0^x dx' \theta\left(\frac{d}{2} - x'\right)}_{= \begin{cases} x & , 0 < x \leq \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & , \frac{d}{2} < x \end{cases}} \quad \text{für } x > 0$$

Elektrisches Feld:

$$\Rightarrow E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \begin{cases} x & , 0 < x \leq \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & , \frac{d}{2} < x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \vec{e}_x & , |x| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{d}{2} \frac{x}{|x|} \vec{e}_x & , |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Bewertung (Earnshaw-Theorem):

In ladungsfreien Gebieten gilt

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = 0.$$

\Rightarrow Das Potential kann kein Minimum oder Maximum haben.

\Rightarrow Es gibt kein statisches Feld, das Objekte in einem stabilen Gleichgewicht hält.

4.1.2 Gauß'sches Durchflutungsgesetz

(42)

Lösungsstrategie:

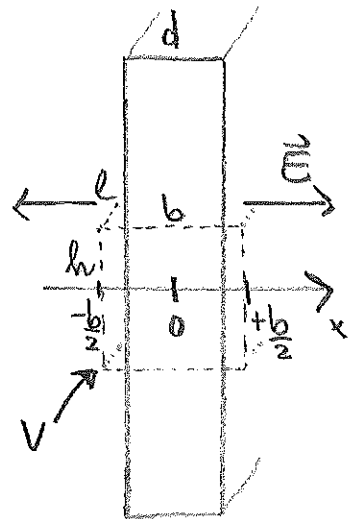
1. Schritt: Wahl eines Symmetrieausatzes für $\vec{E}(\vec{r})$
2. Schritt: Überprüfung der Wirbelfreiheit $\text{rot } \vec{E} = 0$
3. Schritt: Bestimmung von $\vec{E}(\vec{r})$ mittels

$$\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

für geeignet gewähltes Volumen V

Beispiel (homogen geladene Platte):

$$\text{Ansatz: } \vec{E}(\vec{r}) = E(|x|) \frac{x}{|x|} \vec{e}_x$$



$$\text{Wirbelfreiheit: } \text{rot } \vec{E} = 0 \quad \checkmark$$

Durchflutungsgesetz:

$$\frac{Q_V}{\epsilon_0} = \int_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E}$$

$$= \vec{E}(-\frac{b}{2}\vec{e}_x) \cdot h l (-\vec{e}_x) + \vec{E}(+\frac{b}{2}\vec{e}_x) \cdot h l (+\vec{e}_x)$$

$$= 2 h l E(\frac{b}{2})$$

Elektrisches Feld:

$$E\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{Q_V}{2\epsilon_0 h l}$$

$$= \begin{cases} \frac{\rho_0 h b l}{2\epsilon_0 h l} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{b}{2}, & 0 < \frac{b}{2} \leq \frac{d}{2} \\ \frac{\rho_0 h d l}{2\epsilon_0 h l} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{d}{2}, & \frac{d}{2} < \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \vec{e}_x, & |x| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{d}{2} \frac{x}{|x|} \vec{e}_x, & |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

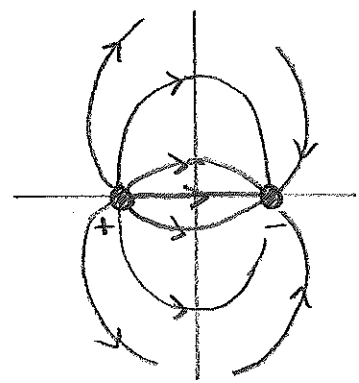
2.12.21 ✓ ↓

4.2 Räumlich begrenzte Ladungsverteilungen

4.2.1 Elektrischer Dipol

Potential zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{-q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \right)$$



„physikalischer Dipol“

Fernfeld $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|$:

(44)

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &= \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_1} \\ &= r \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r}} \quad \left[(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + O(x^2) \right] \\ &\approx r \left(1 - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} &\approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r} \right) + \frac{(-q)}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r} \right) \right]$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

mit dem Dipolmoment $\vec{p} := q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ „Dipolpotential“

Mathematischer Dipol:

(45)

$$\varphi_D(\vec{r}) = \lim_{\substack{\vec{r}_1 \rightarrow 0 \\ \vec{r}_2 \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ \vec{p} = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \text{konst.}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

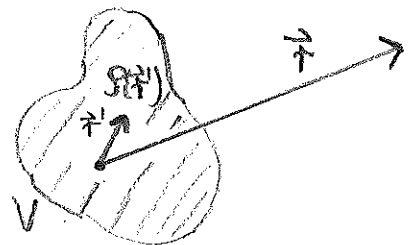
Dipolfeld:

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{\vec{r}}{r} (\vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) - \vec{p} \right]$$

4.2.2 Multipolentwicklung

Potential einer allgemeinen begrenzten Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Fernfeld $|\vec{r}'| \gg |\vec{r}|$:

(46)

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + O\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^4\right)$$

Multipolentwicklung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')}_{=Q} \quad \text{"Monopol"} \right]$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \underbrace{\int d^3\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}')}_{=\vec{p}} \quad \text{"Dipol"}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \frac{\vec{r}^T}{r} \underbrace{\int d^3\vec{r}' (3\vec{r}' \vec{r}'^T - r'^2 \mathbb{1}_3) \rho(\vec{r}')}_{=Q} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{"Quadrupol"}$$

+ ...]

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r}^T Q \vec{r}}{r^5} + \dots \right]$$

Monopolmoment (= Gesamtladung):

(47)

$$q = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

Dipolmoment:

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

Quadrupoltensor:

$$Q = \int d^3\vec{r}' (3 \vec{r}' \vec{r}'^T - \vec{r}'^2 \mathbb{1}_3) \rho(\vec{r}')$$

Beweisungen:

- Allgemeines Dipolmoment $\vec{p} = \int d^3\vec{r} \vec{r} \rho(\vec{r})$ konsistent mit Dipolmoment des physikalischen Dipols mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) - q \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)$:

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r} \vec{r} \rho(\vec{r}) = q \vec{r}_1 - q \vec{r}_2 = q (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \checkmark$$

- Im Allgemeinen ist Dipolmoment von Wahl des Ursprungs abhängig.

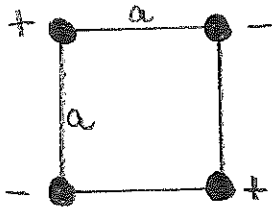
Beispiel (Punktladung): $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \Rightarrow \vec{p} = \int d^3\vec{r} \vec{r} \rho(\vec{r}) = q \vec{r}_1$

- Quadrupoltensor symmetrisch und spurfrei:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$$

$$\text{tr} \mathbf{Q} = \int d^3 \vec{r} \left[\underbrace{3 \text{tr}(\vec{r} \vec{r}^T)}_{= \vec{r}^2} - \underbrace{\vec{r}^2 \text{tr}(\mathbb{1}_3)}_{= 3} \right] \rho(\vec{r}) = 0$$

- Quadrupol entsteht aus zwei entgegengesetzt gerichteten Dipolen:



Punktquadrupol: $a \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$ mit $a^2 q = \text{konst.}$

Potential:
$$\varphi_{\mathbf{Q}}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^T \mathbf{Q} \vec{r}}{r^5}$$



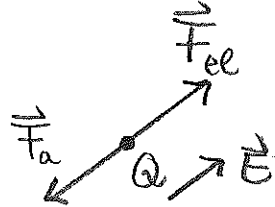
4.3 Arbeit und Energie in der Elektrostatik

(49)

4.3.1 Ladungen im äußeren Feld

Kraft auf Punktladung:

$$\vec{F}_{el} = Q \vec{E}(\vec{r})$$



Arbeit, um Ladung von \vec{r}_0 nach \vec{r}_1 zu verschieben:

$$\begin{aligned} W_a(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \underbrace{\vec{F}_a(\vec{r}')}_{= -\vec{F}_{el}(\vec{r}')} \cdot d\vec{r}' && \text{(quasistatische Verschiebung)} \\ &= -Q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= -Q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} (-\text{grad } \varphi(\vec{r}')) \cdot d\vec{r}' \\ &= -Q [\varphi(\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}_1)] \\ &= -Q U \end{aligned}$$

Elektrische Spannung:

$$U := \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \varphi(\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}_1) \quad \text{(wegunabhängig, da } \text{rot } \vec{E} = 0 \text{)}$$

Interpretation: $W_a(\infty \mapsto \vec{r})$ entspricht der Wechselwirkungsenergie der Ladung Q im äußeren Feld: (50)

$$W'_{el} = Q \varphi(\vec{r})$$

falls $\varphi(\infty) = 0$. Potential φ entspricht der Wechselwirkungsenergie (= potentiellen Energie) pro Ladungseinheit.

Kraft auf Ladungsverteilung:

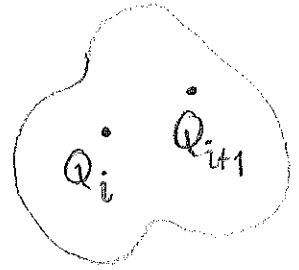
$$\vec{F}_{el} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

Wechselwirkungsenergie der Ladungsverteilung im äußeren Feld:

$$W'_{el} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

4.3.2 Wechselwirkungsenergie von Punktladungen

Strategie: Verschieben Ladungen Q_1, \dots, Q_N nacheinander von ∞ nach $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$.



Arbeit an Q_1 :

$$W_a^{(1)}(\infty \mapsto \vec{r}_1) = Q \varphi^{(0)}(\vec{r}_1) = 0 \quad \text{mit } \varphi^{(0)} = 0$$

Arbeit an Q_i , $i=2, \dots, N$:

$$W_a^{(i)}(\infty \mapsto \vec{r}_i) = Q \varphi^{(i-1)}(\vec{r}_i) \quad \text{mit } \varphi^{(i-1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

Wechselwirkungsenergie aller N Punktladungen:

$$\begin{aligned} W_{el}' &= \sum_{i=2}^N W_a^{(i)}(\infty \mapsto \vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=2}^N Q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \end{aligned}$$

4.3.3 Energie des elektrostatischen Feldes

Elektrische Feldenergie (Kap. 3.3.2):

$$\begin{aligned}
 W_{el} &= \int d^3\vec{r} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varphi \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \varphi) - \underbrace{\varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\rho/\epsilon_0} \right] \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \varphi) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \varphi \rho
 \end{aligned}$$

Elektrische Feldenergie (abgeschlossenes Volumen):

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}') \rho(\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Beispiel (Feldenergie von N Punktladungen):

$$\text{Ladungsdichte: } \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\text{Feldenergie: } W_{el} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\sum_{i=1}^N Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \sum_{j=1}^N Q_j \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{= W'_{el} \text{ Wechselwirkungsenergie}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i Q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_i|}}_{= \infty \text{ Selbstenergie}}$$

Interpretation (Selbstenergie):

Selbstenergie der Punktladung entspricht der Arbeit, um eine „unendlich verdünnte“ Ladungsverteilung auf einen Punkt zusammenzuziehen.

Bemerkung:

Selbstenergie ist ohne Relevanz für Energiebilanz, da konstant.

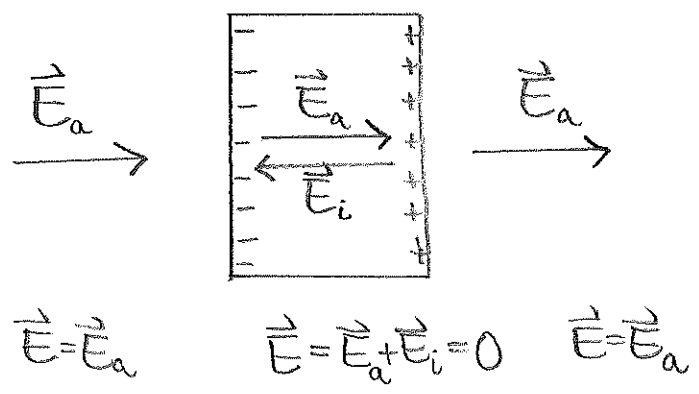
4.4 Elektrostatik bei Anwesenheit elektrischer Leiter

4.4.1 Eigenschaften idealer Leiter

Definition (idealer Leiter): Material mit unbegrenztem Vorrat an frei beweglichen Ladungsträgern.

Eigenschaften:

(i) Im Inneren des Leiters ist $\vec{E} = 0$. Induzierte Ladungen auf Leitersoberfläche kompensieren äußeres Feld.

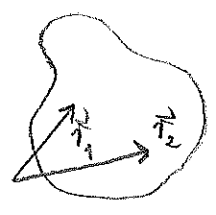


(ii) Im Inneren des Leiters ist $\rho = 0$, da $\text{div } \vec{E} = 0$.

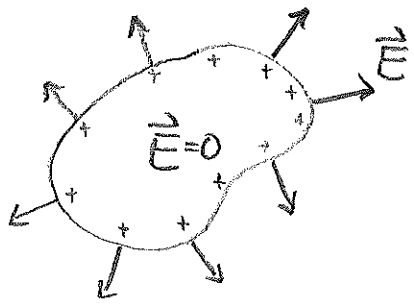
(iii) Jede "Nettoladung" befindet sich auf der Oberfläche des Leiters.

(iv) Ein Leiter ist eine Äquipotentialfläche:

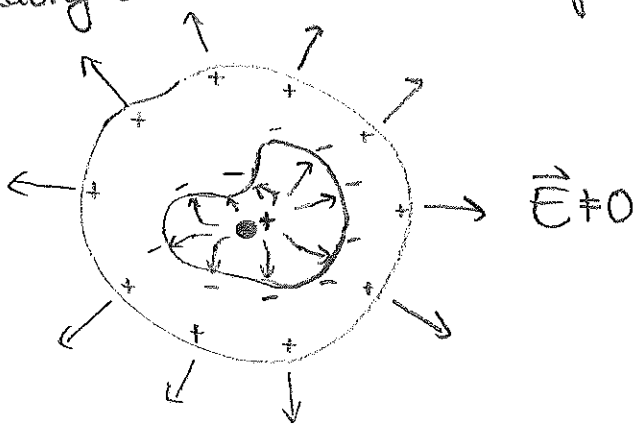
$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{r}_1) = \varphi(\vec{r}_2)$$



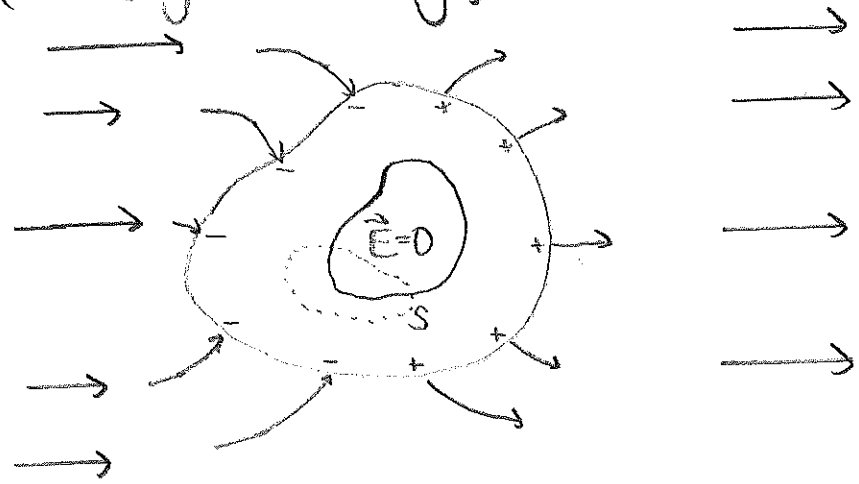
v) Das elektrische Feld steht senkrecht auf der Oberfläche des Leiters



Beispiel 1 (Ladung im Hohlraum eines ungeladenen Leiters):



Beispiel 2 (Faraday'scher Käfig):



Im Hohlraum ist $\vec{E}=0$:

$$0 = \int_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{E} = \oint_{\partial(S)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \text{ für alle } S \Rightarrow \vec{E}=0$$

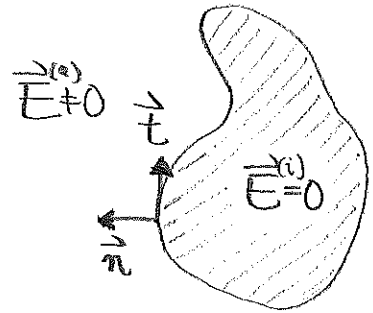
Übergangsbedingungen an Leiteroberfläche:

Auf der Leiteroberfläche gilt für
 (1) die Tangentialkomponenten des el. Feldes im Außenraum

$$\vec{E}^{(a)} \cdot \vec{t} = 0$$

Feld im Außenraum

Tangentenvektor entlang Leiteroberfläche



(2) für die Normalkomponente

$$\vec{E}^{(a)} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Normaleinvektor

Oberflächenladungsdichte

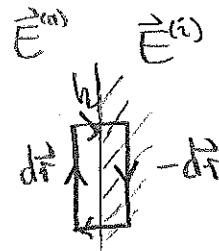
Beweis:

$$(1) \quad 0 = \text{rot } \vec{E}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_C d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$$

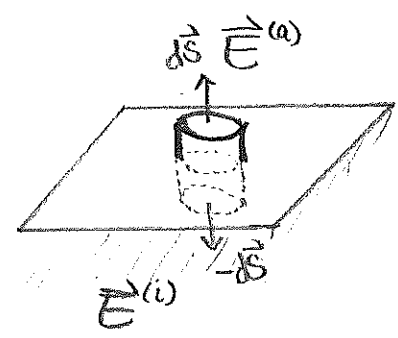
$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \Rightarrow 0 = \underbrace{d\vec{r}}_{d\vec{r} \cdot \vec{t}} \cdot \vec{E}^{(a)} + (-d\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{E}^{(i)}}_{=0}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{t} \cdot \vec{E}^{(a)} \quad \checkmark$$



(2) $\frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div } \vec{E}$

$\Rightarrow \frac{Q_V}{\epsilon_0} = \int_{\text{scv}} d\vec{S} \cdot \vec{E}$



$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q_V}{\epsilon_0} = \underbrace{d\vec{S}}_{dS \vec{n}} \cdot \vec{E}^{(a)} + \underbrace{(-d\vec{S}) \cdot \vec{E}^{(i)}}_{=0}$

$\Rightarrow \vec{E}^{(a)} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} Q_V}{dS} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \checkmark$

Folgerung (Randbedingung für Potential):

Auf der Leitersoberfläche gilt

(1) $\varphi = \text{konst.}$

(2) $\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{n} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

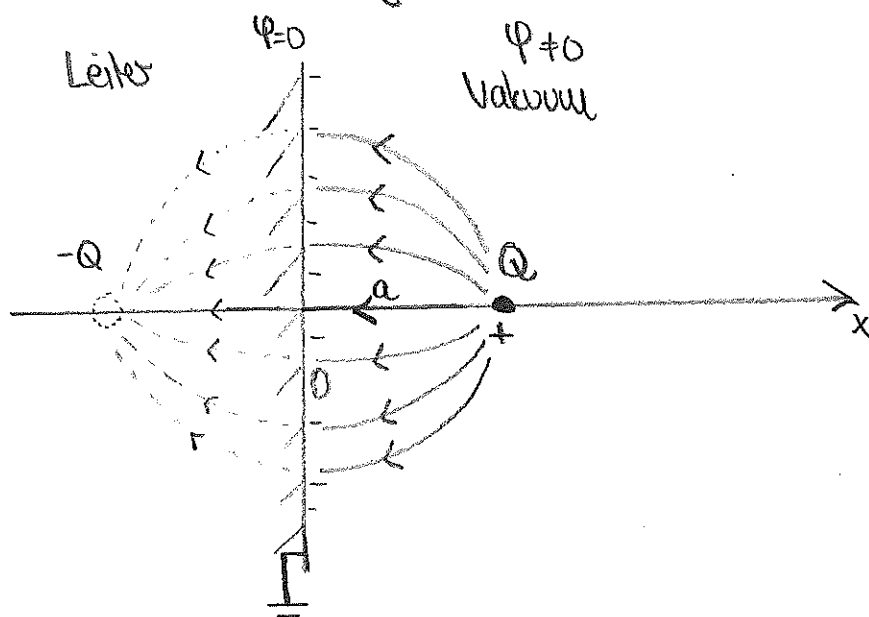
Bestimmung von φ mithilfe der Poisson-Gleichung $\Delta \varphi = 0$ mit Dirichlet-Randbedingungen (1) oder von-Neumann-Randbedingungen (2) möglich.

4.4.3 Methode der Spiegelladungen

(58)

Idee: Erfüllen der Randbedingungen durch geschicktes Ersetzen der Ladungen auf der Leiteroberfläche durch "Scheintladungen" im Inneren des Leiters

Beispiel 1 (Punktladung vor geerdeter leitender Ebene):



Lösung der Randbedingung $\varphi(x=0)=0$ durch Ersetzen der Oberflächenladung durch Scheintladung $-Q$ bei $x=-a$.

Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} + \frac{-Q}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} \right)$$

löst Poisson-Gleichung für $x \geq 0$ und Randbedingung bei $x=0$

Induzierte Ladungsdichte auf Leiteroberfläche

(59)

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \epsilon_0 \vec{E}(x=0) \cdot \vec{n} \\
 &= -\epsilon_0 \left. \vec{\nabla} \phi \right|_{x=0} \cdot \vec{n} \\
 &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{(-a)Q}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{(+a)(-Q)}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \\
 &= -\frac{Q}{2\pi} \frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Gesamtladung auf Leiteroberfläche

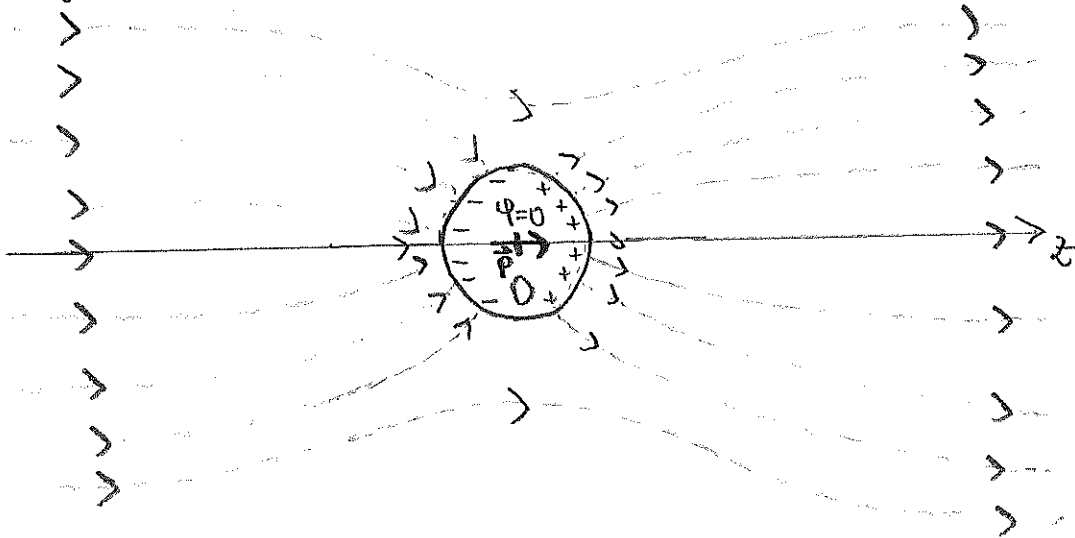
$$\begin{aligned}
 \int dS \sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy dz \sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dt_{\perp} t_{\perp} \left(-\frac{Q a}{2\pi (a^2+t_{\perp}^2)^{3/2}} \right) \left[\begin{array}{l} \xi = t_{\perp}^2 \\ d\xi = 2 t_{\perp} dt_{\perp} \end{array} \right. \\
 &= -Q a \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{(a^2+\xi)^{3/2}} \\
 &= -\frac{Q a}{(a^2+\xi)^{3/2}} \Bigg|_{\xi=0}^{\infty} \\
 &= -Q
 \end{aligned}$$

Influenzladung entspricht Größe der Scheinladung

Beispiel 2 (Geerdete leitende Kugel in homogenen "äußeren Feld):

(60)

$$\varphi = -E_0 z$$



Ansatz: Ersetzen der Oberflächenladungen durch fiktiven mathematischen Dipol bei $\vec{r}=0$

$$\varphi(\vec{r}) = -E_0 z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p z}{r^3}$$

erfüllt Poisson-Gleichung außerhalb Kugel und Randbedingung für $z \rightarrow \pm\infty$.

Randbedingung auf Kugeloberfläche ($r=R$):

$$0 \stackrel{!}{=} \varphi(\vec{r}=R\vec{e}_r)$$

$$= -E_0 R \cos\vartheta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p R \cos\vartheta}{R^3}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = p \vec{e}_z = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 \vec{e}_z$$

Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = -E_0 z \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \frac{R^3}{r^3} \left[3 \frac{\vec{r}}{r} (\vec{E}_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r}) - \vec{E}_0 \right]$$

↑
"äußeres Feld"
↑
Dipolfeld

Metallkugel im "äußeren Feld" $\hat{=}$ induzierter Dipol

Oberflächenladungsdichte:

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{r} = R\vec{e}_r) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r} = R\vec{e}_r) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{=\vec{e}_r} \\ &= 3 \epsilon_0 E_0 \cos\vartheta \end{aligned}$$

Influenzladung:

$$\int_{|\vec{r}|=R} ds \sigma = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta R^2 3\epsilon_0 E_0 \cos\vartheta = 0 \quad \checkmark$$