

5 Magnetfelder stationärer Ströme

5.1 Methoden der Feldberechnung

Definition (Magnetostatik):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Bestimmungsgleichung für Vektorpotential (Coulomb-Eichung):

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Allgemeine Lösung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{A}_0(\vec{r})$$

↙ Lösung des hom. Problems

Magnetische Flussdichte:

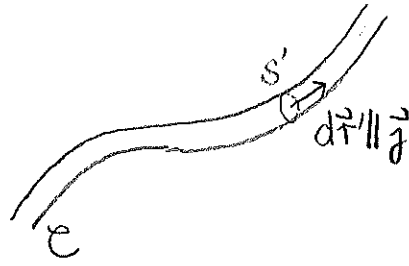
$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \vec{B}_0(\vec{r})$$

„verallg. Biot-Savart-Gesetz“

Spezialfall (dünner Draht):

$$\int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \dots = \int ds' \int dr' \vec{j}(\vec{r}') \dots$$

$$= I \int d\vec{r}' \dots$$



$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \vec{B}_0(\vec{r})$$

„Biot-Savart-Gesetz“

5.2 Räumlich begrenzte Stromverteilungen

Fernfeld $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + O\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)$$

Multipolentwicklung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}')}_{\equiv 0} \quad \text{„Monopol“} \right.$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{r^2} \int d^3 r' \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}'\right) \vec{j}(\vec{r}')}_{\equiv \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad \text{„Dipol“}$$

$$\left. + \dots \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} + \dots$$

Dipolmoment:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

Feld eines magnetischen Dipols:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{\vec{r}}{r} (\vec{m} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) - \vec{m} \right]$$

Bemerkungen:

- Dipolmoment für ebene dünne Stromschleife:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{r} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

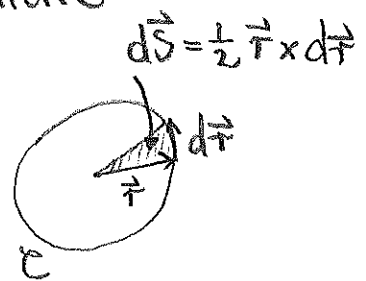
$$= \frac{1}{2} \int_{e(s)} \vec{r} \times I d\vec{r}$$

$$= I \int_S d\vec{S}$$

$$\Rightarrow |\vec{m}| = I \cdot S$$

↑
Strom

↑
durch Stromschleife
eingeschlossene Fläche



• Idealer magnetischer Dipol :



$$\vec{m} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ I \cdot s = \text{konst}}} I \int_S d\vec{S}$$

5.3 Energie in der Magnetostatik

5.3.1 Stromverteilungen im "äußeren Feld"

Kraft auf Stromverteilung:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_V d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \\ &= \vec{B}(0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i} \Big|_{\vec{r}=0} x_i + O(r^2) \\ &= \text{grad}(\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{m}) \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \end{aligned}$$

falls Stromverteilung in der Nähe von $\vec{r}=0$ lokalisiert ist

Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols
im äußeren Feld:

(66)

$$W'_m = - \vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

5.3.2 Energie des statischen magnetischen Feldes

Magnetische Feldenergie (Kap. 3.3.2):

$$W_m = \int_V d^3\vec{r} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3\vec{r} \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A}$$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3\vec{r} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})}_0 + \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3\vec{r} \underbrace{\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})}_{=\mu_0 \vec{j}}$$

$$\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (\text{abgeschlossenes Volumen})$$

$$= \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{r} \vec{A} \cdot \vec{j}$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

magnetische Energie
einer Stromverteilung