6 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

6.1 Wellengleichungen

Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Wellengleichung für elektrische Feldstärke:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{= \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{=0} - \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{\nabla})}_{=\Delta}\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$$

„homogene Wellengleichung" Lichtgeschwindigkeit

Wellengleichung für magnetische Flussdichte:

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{r},t) = 0}$$

6.2 Ebene Wellen

Lösungsansatz:

„Wellenvektor" „Kreisfrequenz"

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Bemerkungen:

- Ansatz beschreibt ebene ($\vec{k}$ = konst.) monochromatische (ω = konst.) Wellen
- Konstanten $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ können komplex sein
- Weitere Lösungen durch Superposition ebener Wellen, z.B. Wellenpakete
- Physikalische Lösungen reell, z.B. durch Bildung des Realteils der komplexen Lösung

Wellengleichung:

$$0 = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \left((i\vec{k})^2 - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\right)\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\Rightarrow 0 = k^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = ck}$$

Dispersionsrelation einer elektromagnetischen Welle im Vakuum

Beispiel (Ebene Welle in z-Richtung):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] \qquad \text{mit } \vec{k} = k\vec{e}_z\,,\ \vec{E}_0 \text{ reell}$$

$$= \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t)$$

Flächen gleicher Phase: $kz - \omega t = \varphi_0 = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \quad z(t) = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{\omega}{k} t$$

Wellenfronten sind Ebenen, die sich in $\vec{k}$-Richtung ausbreiten und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen

Phasengeschwindigkeit: $\boxed{v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = c}$ „Lichtgeschwindigkeit"

Transversalität elektromagnetischer Wellen:

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) = i\vec{k}\cdot\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} \perp \vec{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} \perp \vec{k}}$$

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0} \Rightarrow |\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|$$

Bei ebenen Wellen bilden $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}$ ein Rechtsdreibein

Polarisation elektromagnetischer Wellen:

(1) Linear polarisierte ebene Welle: $\vec{E}_0$ reell

$$\operatorname{Re}\vec{E}(0,t) = \vec{E}_0\cos\omega t \qquad \text{mit } \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

Richtung von $\operatorname{Re}\vec{E}$ bis auf Vorzeichen konstant

(2) Zirkular polarisierte ebene Welle: $\vec{E}_0$ komplex mit
$\operatorname{Re}\vec{E}_0 \perp \operatorname{Im}\vec{E}_0$ und $|\operatorname{Re}\vec{E}_0| = |\operatorname{Im}\vec{E}_0|$

$$\operatorname{Re}\vec{E}(0,t) = (\operatorname{Re}\vec{E}_0)\cos\omega t + (\operatorname{Im}\vec{E}_0)\sin\omega t$$

$\operatorname{Re}\vec{E}$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreis

(3) Elliptisch polarisierte ebene Welle: $\vec{E}_0$ komplex mit
$\operatorname{Re}\vec{E}_0 \not\perp \operatorname{Im}\vec{E}_0$ oder $|\operatorname{Re}\vec{E}_0| \neq |\operatorname{Im}\vec{E}_0|$

6.3 Energie, Impuls und Intensität elektromagnetischer Wellen

Energiedichte:

$$w_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}(\mathrm{Re}\,\vec{E})^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\mathrm{Re}\,\vec{B})^2$$

$$= \Big(\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2}}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}E_0^2\Big)\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$= \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

Mittlere Energiedichte:

$$\overline{w_{em}} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, w_{em}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0}B_0^2 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Energiestromdichte:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{Re}\,\vec{E})\times(\mathrm{Re}\,\vec{B})$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_0\times\vec{B}_0\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$= \frac{1}{\mu_0\omega}\left[\vec{E}_0\times(\vec{k}\times\vec{E}_0)\right]\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$= \frac{\vec{k}}{\mu_0\omega}E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad \left[\omega = \frac{c^2k}{c} = \frac{k}{\mu_0\varepsilon_0 c}\right]$$

$$= c\,\frac{\vec{k}}{k}\,\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$= c\,\frac{\vec{k}}{k}\,w_{em}$$

Energie wird mit Lichtgeschwindigkeit in $\vec{k}$-Richtung transportiert

Intensität:

$$\overline{I} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T dT \, \vec{S}(t) \right| = c \, \overline{w_{em}} = \frac{1}{2} c \, \varepsilon_0 E_0^2$$

Intensität entspricht mittlerer Energie pro Zeit und Fläche (senkrecht zu $\vec{k}$)

Impulsdichte:

$$\vec{p}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{w_{em}}{c} \frac{\vec{k}}{k}$$

Impuls wird in $\vec{k}$-Richtung transportiert