Elektrodynamik für das Lehramt WS 21/22

DR. L. JANSSEN

2. Übung (Besprechung: 25.-29.10.21)

---

1. Elektrisches Feld einer Kreisscheibe

Eine stationäre Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ erzeugt ein elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld einer infinitesimal dünnen, homogen geladenen Kreisscheibe mit Radius R, der z-Achse als Symmetrieachse und der Flächenladungsdichte $\sigma = Q/(\pi R^2)$ in allen Punkten $\vec{r} = (0, 0, z)$ auf der Symmetrieachse.

Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis von Aufgabe 3(b) der 1. Übung verwenden.

(b) Welches Ergebnis folgt aus (a) für die Spezialfälle $z \ll R$ und $z \gg R$?

(c) Welches Ergebnis folgt aus (a) im Limes $R \to \infty$?

(d) Bestimmen Sie mittels (c) das Feld eines idealen Plattenkondensators.

Hinweis: Ein idealer Plattenkondensator besteht aus zwei unendlich ausgedehnten parallelen Ebenen im Abstand d mit entgegengesetzt gleich großen Fächenladungsdichten.

2. Kraft auf geladenen Stab

In Analogie zur Kraft auf eine Punktladung berechnet sich die Gesamtkraft $\vec{F}$ auf eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im Volumen V aus

$$\vec{F} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}). \tag{2}$$

Ein homogen geladener Stab (Länge L, quadratischer Querschnitt mit Seitenlänge a, Gesamtladung Q) liegt entlang der z-Achse zwischen $z = A$ und $z = A + L$. Wie groß ist die Gesamtkraft auf den Stab, wenn sich dieser

(a) in dem äußeren Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \vec{e}_z$ befindet?

(b) in dem Feld einer Punktladung q, die im Koordinatenursprung liegt, befindet? Nehmen Sie dabei an, dass der Stab dünn im Vergleich zur Länge des Stabes und zum Abstand Stab-Punktladung ist, $a \ll L, A$. Was erhält man, wenn zusätzlich noch $L \ll A$ gilt?

Hinweis: Führen Sie zunächst die z-Integration mithilfe der Substitution $u = z^2$ aus und machen Sie eine geeignete Näherung, bevor sie die x- und y-Integrationen ausführen.

3. Gradientenfeld

Berechnen Sie das Gradientenfeld $\operatorname{grad} \phi(\vec{r}) \coloneqq (\partial_x \phi(\vec{r}), \partial_y \phi(\vec{r}), \partial_z \phi(\vec{r}))$ für die folgenden skalaren Felder

(a) $\phi(\vec{r}) = \gamma r^2$, wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante,

(b) $\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$, wobei $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger konstanter Vektor.