Elektrodynamik für das Lehramt WS 21/22

Dr. L. Janssen **3. Übung (Besprechung: 01.-05.11.21)**

---

1. Eigenschaften der Deltafunktion

Die Dirac'sche Deltafunktion kann definiert werden durch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x) f(x) = f(0) \tag{1}$$

für alle glatten und am Rande des Definitionsgebietes genügend abfallenden Testfunktionen $f(x)$. Benutzen Sie die obige Definition, um folgende Eigenschaften der Deltafunktion für glatte Testfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu zeigen:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x-a) f(x) = f(a)$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x \delta(x) g(x) = 0$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}$ für $\alpha > 0$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta'(x) f(x) = -f'(0)$

Hinweis: Mathematiker/innen sprechen von einer *Distribution*, um anzuzeigen, dass diese Funktion im Sinne einer Anwendung auf Testfunktionen wie in Gl. (1) zu verstehen ist.

2. Oberflächenintegral

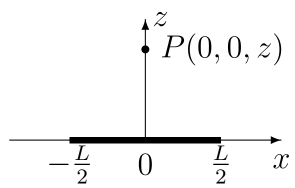
Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{G}(\vec{r}) = (0, 0, y)$ sowie die Fläche S, definiert als der im ersten Oktanten gelegene Teil der Ebene $6x + 3y + 2z = 12$.

(a) Geben Sie den Flächenelementvektor $\mathrm{d}\vec{S}$ an, welcher senkrecht auf S steht und ausgehend von S vom Koordinatenursprung wegzeigt.

(b) Berechnen Sie den Fluss $\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{G}(\vec{r})$ des Vektorfeldes $\vec{G}$ durch die Fläche S.

3. Elektrisches Feld eines Stabes

Gegeben sei ein homogen geladener dünner Stab (Länge L, Gesamtladung q) entlang der x-Achse von $x = -L/2$ bis $x = L/2$ und eine Probeladung Q im Punkt $P(0, 0, z)$ auf der z-Achse (siehe Zeichnung).



(a) Überzeugen Sie sich davon, dass die Raumladungsdichte durch $\rho(\vec{r}) = \lambda \Theta(\frac{L}{2} + x)\Theta(\frac{L}{2} - x)\delta(y)\delta(z)$ gegeben ist. Wie hängt die Linienladungsdichte λ mit der Gesamtladung q zusammen?

(b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(0, 0, z)$ im Punkt P.

Hinweis 1: Argumentieren Sie zunächst mithilfe von Symmetrien, dass $\vec{E}(0, 0, z) \parallel \vec{e}_z$ ist.

Hinweis 2: $\int \mathrm{d}u (1 + u^2)^{-3/2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \text{konst.}$

(c) Was erhalten Sie im Limes $z \ll L$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem elektrischen Feld, welches durch eine Punktladung q, die sich im Ursprung befindet, am Ort P erzeugt wird.