Elektrodynamik für das Lehramt WS 21/22

DR. L. JANSSEN

4. Übung (Besprechung: 08.-12.11.21)

1. Quellendichte eines elektrischen Feldes

Für ein infinitesimal kleines Volumen ΔV lautet das Gaußsche Durchflutungsgesetz

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\limits_{S(\Delta V)} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}, \tag{1}$$

wobei $S(\Delta V)$ die Oberfläche des Volumens ΔV bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass Gl. (1) für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ auf die Ladungsdichte einer Punktladung q am Ort $\vec{r} = 0$ führt.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, dass ΔV den Punkt $\vec{r} = 0$ umschließt bzw. nicht umschließt und wählen Sie der Symmetrie des Problems angepasste Volumina ΔV. Eine geeignete Wahl ist z.B. im ersten Fall eine infinitesimale Kugel $\Delta V = \frac{4\pi}{3}(\Delta r)^3$ um den Ursprung mit infinitesimalen Radius Δr, und im zweiten Fall ein infinitesimal kleines Volumenelement $\Delta V = r^2 \sin\vartheta \Delta r \Delta\vartheta \Delta\varphi$ bei endlichem Radius $r > 0$ in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ).

(b) Benutzen Sie den Gaußschen Satz $\oint_{S(\Delta V)} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Delta V} \mathrm{d}V \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} E$ für das kleine Volumen ΔV, um zu zeigen, dass die Divergenz der Funktion $\frac{\vec{r}}{4\pi r^3}$ die Eigenschaften einer Dirac'schen Deltafunktion besitzt, d.h., dass gilt

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\vec{r}). \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie mithilfe von Gl. (2) die folgende Identität für den Laplace-Operator $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$,

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}). \tag{3}$$

2. Elektrisches Feld einer Kugelschale I

Gegeben sei eine (unendlich) dünne homogen geladene Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ mit Hilfe der Formel

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}. \tag{4}$$

3. Elektrisches Feld einer Kugelschale II

Bestimmen Sie das elektrische Feld für die Kugelschale aus Aufgabe 2 mit Hilfe des Gaußschen Durchflutungsgesetzes

$$\oint\limits_{S(V)} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \tag{5}$$

unter Ausnutzung der Symmetrie des Problems.

Hinweis: Wählen Sie ein der Symmetrie des Problems angepasstes Integrationsgebiet V.