Elektrodynamik für das Lehramt WS 21/22

Dr. L. Janssen

7. Übung (Besprechung: 29.11.-03.12.21)

---

1. Maxwell'scher Spannungstensor

Gegeben seien zwei Punktladungen $q_1 = Q$ und $q_2 = -Q$ an den Orten $\vec{r}_1 = a\vec{e}_z$ und $\vec{r}_2 = -a\vec{e}_z$.

(a) Bestimmen Sie die Kraft auf die Ladung q_2 mithilfe des Coulomb-Gesetzes.

(b) Bestimmen Sie das elektrische Feld der beiden Ladungen an einem beliebigen Punkt $\vec{r}$ des Raumes.

(c) Geben Sie den Maxwell'schen Spannungstensor für einen beliebigen Punkt $\vec{r}$ in der xy-Ebene ($z = 0$) an.

(d) Berechnen Sie die Kraft auf die Ladung q_2 mithilfe der integralen Impulsbilanzgleichung.
Hinweis: Die Kraft $\vec{F}$, die durch das elektromagnetische Feld auf die Ladungen und Ströme innerhalb eines Volumens V ausgeübt wird, lässt sich mithilfe der Beziehung $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{\mathrm{mech}}$ durch den mechanischen Impuls $\vec{P}_{\mathrm{mech}}$ ausdrücken. Wenden Sie die integrale Impulsbilanzgleichung an und überlegen Sie sich, welche Anforderungen an die Wahl des Integrationsvolumens V gestellt sind. Wählen Sie dann ein Volumen V, für das sich die resultierenden Oberflächenintegrale möglichst einfach berechnen lassen.

2. Energie und Impuls einer ebenen Welle

Gegeben seien das skalare Potential $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{e}_y A_0 \cos(ckt - \vec{k} \cdot \vec{r})$ mit konstantem Wellenzahlvektor $\vec{k} = k\vec{e}_x$ und Lichtgeschwindigkeit c.

(a) Berechnen Sie die zugehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und die zugehörige magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ die Maxwell-Gleichungen für den Fall verschwindener Ladungs- und Stromverteilung erfüllen.

(c) Zeigen Sie, dass die Potentiale die Lorenzeichung erfüllen.

(d) Berechnen Sie die Energiedichte $w_{\mathrm{em}} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$ und die Impulsdichte $\vec{p}_{\mathrm{em}} = \frac{\vec{S}}{c^2}$ des elektromagnetischen Feldes.

3. Eichtransformationen

Gegeben seien die elektromagnetischen Potentiale $\varphi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

(a) Durch welche Eichfunktion $\Lambda(\vec{r}, t)$ lässt sich das skalare Potential zum Verschwinden bringen?

(b) Welche Gleichungen muss das neue Vektorpotential $\vec{A}'$ in dem Fall $\varphi' = 0$ erfüllen? Leiten Sie daraus die Kontinuitätsgleichung ab.
Hinweis: Für Vektorfelder $G(\vec{r})$ gilt die Identität $\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) - \nabla^2\vec{G}$.