2 Grundbegriffe

2.1 Ladung und Ladungsdichte

Eigenschaften (Ladung):

(a) Es existieren zwei Arten von elektrischer Ladung, die wir als „positiv" und „negativ" bezeichnen.

(b) Die Ladung eines abgeschlossenen Systems von Teilchen bleibt erhalten („globale Ladungserhaltung").

Beispiel (Betazerfall):

$$n \mapsto p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

Neutron Proton Elektron Antineutrino

Bemerkung:
Es gilt sogar lokale Ladungserhaltung, beschrieben durch Kontinuitätsgleichung (Kapitel 3)

(c) Die Ladung ist quantisiert,

$$q = Ze \quad , \quad Z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

mit der Elementarladung $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,C$ (exakt).

Beispiele:

$$Z = \begin{cases} -1 & \text{Elektron} \\ +1 & \text{Proton} \\ 0 & \text{Neutron} \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Für makroskopische Phänomene kann Quantisierung typischerweise vernachlässigt werden

- Quarks haben fraktionale Ladung $q = \pm\frac{e}{3}, \pm\frac{2e}{3}$, aber konnten bisher nie isoliert beobachtet werden („Confinement")

  Beispiel (Proton):

$$p \;=\; d \;+\; 2u$$

Proton	Down-Quark	Up-Quark
$q = +e$	$q = -\frac{1}{3}e$	$q = \frac{2}{3}e$

- Quantisierung der elektrischen Ladung phänomenologische Tatsache, theoretische Begründung ungeklärt („Dirac-Monopole")

Definition (Ladungsdichte):

Die Raumladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ beschreibt eine elektrische Ladung $dq(t)$ im Volumenelement dV um Ort $\vec{r}$ zur Zeit t, wobei

$$\rho(\vec{r},t) := \frac{dq(t)}{dV} \qquad \text{(Quotient!)}$$

Gesamtladung in Volumen V:

$$\boxed{q(t) = \int_V dq(t) = \int_V dV\, \rho(\vec{r},t)}$$

Beispiel (Punktladung am Ort $\vec{r}_0$):

Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \infty & \text{für } \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}$

Gesamtladung $q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})$

Geschlossene Form:

$$\rho(\vec{r}) = q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Bemerkung (System von Punktladungen):

Ladungsdichte von N Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{q_i}_{\text{Ladungen}}\, \delta(\vec{r} - \underbrace{\vec{r}_i}_{\text{Orte}})$$

Definition (Flächenladungsdichte):

$$\sigma(\vec{r},t) := \frac{dq(t)}{dS}$$ (Ladung pro Flächenelement dS)

Definition (Linienladungsdichte):

$$\lambda(\vec{r},t) := \frac{dq(t)}{dl}$$ (Ladung pro Linienelement dl)

13.10.22

2.2 Strom und Stromdichte

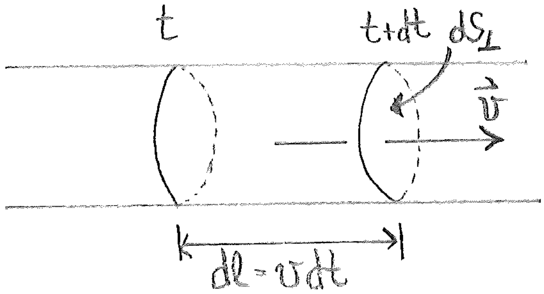
Definition (Stromdichte):

Der Stromdichtevektor $\vec{j}(\vec{r},t)$ beschreibt einen elektrischen Strom, der sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r},t)$ bewegt und bei dem die Ladung dq im Zeitintervall dt durch die senkrecht zu $\vec{v}$ liegende Fläche $dS_\perp$ hindurchtritt, mit

$$\vec{j}(\vec{r},t) := \frac{dq(t)}{dt \cdot dS_\perp} \frac{\vec{v}(\vec{r},t)}{|\vec{v}(\vec{r},t)|} \qquad \text{(Quotient!)}$$

Zusammenhang Stromdichte und Ladungsdichte:

Röhre parallel zu $\vec{v}$ mit infinitesimalem Querschnitt $dS_\perp$:



Stromdichte:

$$|\vec{j}| = \frac{dq}{dt\, dS_\perp} = \frac{\rho\, dV}{dt\, dS_\perp} = \frac{\rho\, dS_\perp\, dl}{dt\, dS_\perp} = \rho\, v$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)}$$

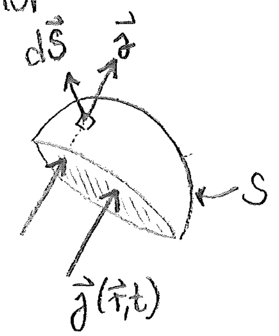
Beispiel (bewegte Punktladung mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$):

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\,\vec{v}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

Definition (Strom):

Die Stromstärke I_S durch eine Fläche S ist

$$\boxed{I_S(t) := \int_S d\vec{S}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)}$$

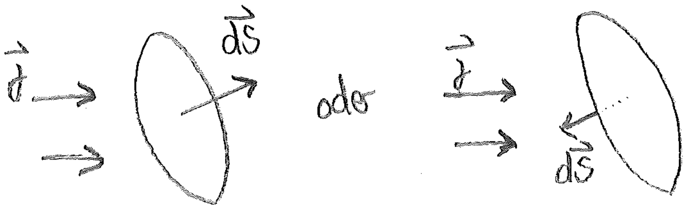


Bemerkungen:

- Strom durch infinitesimales Oberflächenelement $d\vec{S}$:

$$\begin{aligned} dI &= \vec{j}\cdot d\vec{S} = j\,dS\,\cos\sphericalangle(\vec{j},d\vec{S}) \\ &= j\,dS_\perp = \frac{dq}{dt\,dS_\perp}\,dS_\perp \\ &= \frac{dq}{dt} \qquad \text{"Ladung pro Zeit"} \end{aligned}$$

- Vorzeichen von I_S von Richtung von $d\vec{S}$ abhängig



2.3 Elektrische Felder

Definition (elektrische Feldstärke):

Die elektrische Feldstärke ist Kraft $\vec{F}$ pro Ladungseinheit auf ruhende Probeladung Q,

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) := \frac{\vec{F}(\vec{r},t)}{Q}}$$

Bemerkungen:

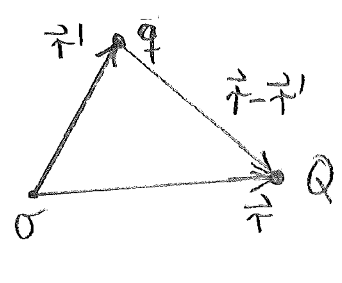
- Begriff der Probeladung Idealisierung (keine Ausdehnung, keine Rückwirkung auf Feld)
- Feldstärke durch Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r},t)$ beschrieben

Beispiel (elektrisches Feld einer Punktladung):

Kraft, die ruhende Punktladung q am Ort $\vec{r}\,'$ auf Probeladung Q am Ort $\vec{r}$ ausübt:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\, Q\, \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$ "Coulomb-Gesetz"

mit $\varepsilon_0 = 8{,}854\ldots \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N m^2}$ "Permittivität des Vakuums"



Elektrisches Feld der Punktladung:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

Bemerkungen:

- Feld unabhängig von Probeladung Q (gilt allgemein!)
- Für elektrisches Feld von mehreren Ladungen gilt

Superpositionsprinzip:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} = \frac{\overset{\text{Kraft von } q_1 \text{ auf } Q}{\vec{F}_1(\vec{r})} + \vec{F}_2(\vec{r}) + \dots}{Q}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} + \dots$$

Beispiel (elektrisches Feld einer Ladungsverteilung):

Beschreiben Ladungsverteilung als unendliche Summe von Punktladungen:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Elektrisches Feld:

$$E(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \qquad \Big|\; 1 = \int d^3\vec{r}' \, \delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)$$

$$= \sum_i \int d^3\vec{r}' \, \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i) \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}}_{\text{Beiträge nur für } \vec{r}'=\vec{r}_i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} q_i \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \underbrace{\sum_i q_i \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i)}_{=\rho(\vec{r}\,')}$$

$$\boxed{E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

Bemerkung:

Analog ergibt sich das elektrische Feld einer Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dS' \sigma(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

und einer Linienladungsdichte $\lambda(\vec{r})$:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dl' \lambda(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

20.10.22

2.4 Magnetische Felder

Definition (magnetische Flussdichte):

Erfährt eine ruhende Probeladung Q keine, eine mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ sich bewegende Probeladung Q jedoch eine in der Form

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},t) = Q\, \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)}$$

darstellbare Kraft, so ist $\vec{B}(\vec{r},t)$ die magnetische Flussdichte.

Bemerkungen:

- $B(\vec{r},t)$ wie $\vec{E}(\vec{r},t)$ Vektorfeld
- Definition von $\vec{B}(\vec{r},t)$ unabhängig von $\vec{v}$ (Experiment!)
- Gesamtkraft auf bewegte Ladung Q in elektromagnetischem Feld:

$$\boxed{\vec{F} = Q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \quad \text{verallg. Lorentzkraft}$$

- $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben von Existenz einer Probeladung unabhängige Bedeutung, können Energie, Impuls und Drehimpuls tragen (Kap. 3)

2.5 Elektromagnetische Einheiten

Internationales Einheitensystem (SI, mksA-System):

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$

- Lorentz-Kraft: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

- Ladung: $[Q] = 1\,C = 1\,As$
- Elektrisches Feld: $[E] = \frac{N}{C} = kg\, m\, s^{-3} A^{-1}$
- Magnetische Flussdichte: $[B] = \frac{N\,s}{C\,m} = kg\, s^{-2} A^{-1}$

Gaußsches Einheitensystem (cgs-System):

- Coulomb-Gesetz: $\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$

- Lorentz-Kraft: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$

- Ladung: $[Q] = \sqrt{[F]}\,[r] = g^{1/2}\, cm^{3/2}\, s^{-1}$
- Elektrisches Feld: $[E] = \frac{[F]}{[Q]} = g^{1/2}\, cm^{-1/2}\, s^{-1}$
- Magnetische Flussdichte: $[B] = [E] = g^{1/2}\, cm^{-1/2}\, s^{-1}$

$\rightarrow$ sinnvoll für relativistische Formulierung der Elektrodynamik