5 Magnetfelder stationärer Ströme

5.1 Methoden der Feldberechnung

Definition (Magnetostatik):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Bestimmungsgleichung für Vektorpotential (Coulomb-Eichung):

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

Allgemeine Lösung:

Lösung des hom. Problems

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \vec{A}_0(\vec{r})$$

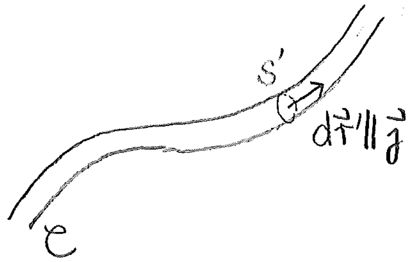
Magnetische Flussdichte:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} + \vec{B}_0(\vec{r})}$$

„verallg. Biot-Savart-Gesetz"

Spezialfall (dünner Draht):

$$\int d^3\vec{r}\,' \,\vec{j}(\vec{r}\,') \ldots = \int ds' \int d\vec{r}\,' \,\vec{j}(\vec{r}\,') \ldots$$



$$= I \int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\,' \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + \vec{B}_0(\vec{r})}$$

„Biot-Savart-Gesetz"

5.2 Räumlich begrenzte Stromverteilungen

Fernfeld $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,' \cdot \vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)$$

Multipolentwicklung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\underbrace{\frac{1}{r}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')}_{\equiv 0} \qquad \text{„Monopol"}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{r^2}\int d^3\vec{r}\,' \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j}(\vec{r}\,')}_{\equiv \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}} \qquad \text{„Dipol"}$$

$$+ \ldots \Big]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \; \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \; + \; \dots$$

Dipolmoment:

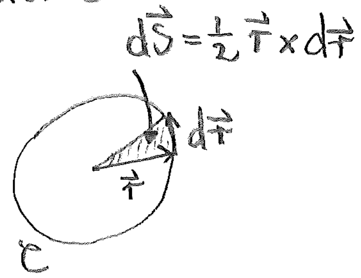
$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}' \; \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$$

Feld eines magnetischen Dipols:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{\vec{r}}{r} \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) - \vec{m} \right]$$

Bemerkungen:

- Dipolmoment für ebene dünne Stromschleife:

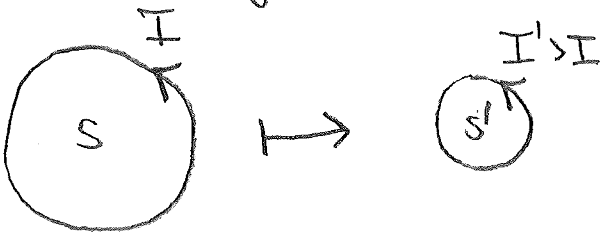


$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \; \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}(S)} \vec{r} \times I \, d\vec{r}$$

$$= I \int_S d\vec{S} \qquad \Rightarrow \quad |\vec{m}| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Strom}}}{I} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{durch Stromschleife} \\ \text{eingeschlossene Fläche}}}{S}$$

- Idealer magnetischer Dipol:



mit $I'S' = I \cdot S$

$$\vec{m} = \lim_{\substack{S \to 0 \\ I \to \infty \\ IS = \text{konst}}} I \int_S d\vec{S}$$

5.3 Energie in der Magnetostatik

5.3.1 Stromverteilungen im äußeren Feld

Kraft auf Stromverteilung:

$$\vec{F} = \int_V d^3\vec{r}\; \vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{B}(\vec{r})}_{= \vec{B}(0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=0} x_i + O(r^2)}$$

$$= \operatorname{grad}\left(\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{m}\right)\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

falls Stromverteilung in der Nähe von $\vec{r}=0$ lokalisiert ist

Wechselwirkungsenergie eines magnetischen Dipols im äußeren Feld:

$$W_m' = -\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{r})$$

5.3.2 Energie des statischen magnetischen Feldes

Magnetische Feldenergie (Kap. 3.3.2):

$$W_m = \int_V d^3\vec{r}\ \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_V d^3\vec{r}\ \vec{B}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad \left[\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\int_V d^3\vec{r}\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})}_{\oint_{S(V)} d\vec{S}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0} + \frac{1}{2\mu_0}\int_V d^3\vec{r}\ \vec{A}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{=\mu_0\vec{j}}$$

(abgeschlossenes Volumen)

$$= \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{r}\ \vec{A}\cdot\vec{j}$$

$$\boxed{W_m = \frac{\mu_0}{2}\int d^3\vec{r}\int d^3\vec{r}\,'\ \frac{\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

magnetische Energie einer Stromverteilung

12.1.23