

6 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

(67)

6.1 Wellengleichungen

Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Wellengleichung für elektrische Feldstärke:

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{= \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}}_{=\Delta} \vec{E}} &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{=\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{mit}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Lichtgeschwindigkeit

Wellengleichung für magnetische Flussdichte:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

6.2 Ebene Wellen

68

Lösungsansatz:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Wellenvektor
"Kreisfrequenz"

Bemerkungen:

- Ansatz beschreibt ebene ($\vec{k} = \text{konst.}$) monochromatische ($\omega = \text{konst.}$)

Wellen

- Konstanten \vec{E}_0, \vec{B}_0 können komplex sein
- Weitere Lösungen durch Superposition ebener Wellen, z.B.

Wellenpakete

- Physikalische Lösungen reell, z.B. durch Bildung des Realteils der komplexen Lösung

Wellengleichung:

$$0 = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \left((i\vec{k})^2 - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \right) \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow 0 = k^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = ck}$$

Dispersionsrelation einer elektromagnetischen Welle im Vakuum

Beispiel (Ebene Welle in z-Richtung):

(69)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad \text{mit } \vec{k} = k \vec{e}_z, \vec{E}_0 \text{ reell}$$
$$= \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t)$$

Flächen gleicher Phase: $kz - \omega t = \varphi_0 = \text{konst.}$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{\omega}{k} t$$

Wellenfronten sind Ebenen, die sich in \vec{k} -Richtung ausbreiten und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen

Phasengeschwindigkeit: $\boxed{v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = c}$ „Lichtgeschwindigkeit“

Transversalität elektromagnetischer Wellen:

$$0 = \operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) = i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \vec{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} \perp \vec{k}}$$

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0} \Rightarrow |\vec{E}_0| = c |\vec{B}_0| \quad (70)$$

Bei ebenen Wellen bilden \vec{k} , \vec{E}_0 und \vec{B}_0 ein Rechtshändiges Dreieck

Polarisation elektromagnetischer Wellen:

(1) Linear polarisierte ebene Welle: \vec{E}_0 reell

$$\operatorname{Re} \vec{E}(0,t) = \vec{E}_0 \cos \omega t \quad \text{mit } \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

Richtung von $\operatorname{Re} \vec{E}$ bis auf Vorzeichen konstant

(2) Zirkular polarisierte ebene Welle: \vec{E}_0 komplex mit

$$\operatorname{Re} \vec{E}_0 \perp \operatorname{Im} \vec{E}_0 \quad \text{und} \quad |\operatorname{Re} \vec{E}_0| = |\operatorname{Im} \vec{E}_0|$$

$$\operatorname{Re} \vec{E}(0,t) = (\operatorname{Re} \vec{E}_0) \cos \omega t + (\operatorname{Im} \vec{E}_0) \sin \omega t$$

$\operatorname{Re} \vec{E}$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreis

(3) Elliptisch polarisierte ebene Welle: \vec{E}_0 komplex mit

$$\operatorname{Re} \vec{E}_0 \not\perp \operatorname{Im} \vec{E}_0 \quad \text{oder} \quad |\operatorname{Re} \vec{E}_0| \neq |\operatorname{Im} \vec{E}_0|$$

6.3 Energie, Impuls und Intensität elektromagnetischer Wellen

(71)

Energiedichte (linear polarisierte ebene Welle):

$$\begin{aligned}w_{em} &= \frac{\epsilon_0}{2} (\operatorname{Re} \vec{E})^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\operatorname{Re} \vec{B})^2 \\&= \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{c^2} E_0^2}_{\frac{\epsilon_0}{2}} \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\&= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\end{aligned}$$

Mittlere Energiedichte:

$$\overline{w_{em}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt w_{em}(t) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2$$

$\leftarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

Energiestromdichte:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{Re} \vec{E}) \times (\operatorname{Re} \vec{B}) \\&= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\&= \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) \right] \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\&= \frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \left[\omega = \frac{c^2 k}{c} = \frac{k}{\mu_0 \epsilon_0 c} \right] \\&= c \frac{\vec{k}}{k} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\&= c \frac{\vec{k}}{k} w_{em}\end{aligned}$$

Energie wird mit Lichtgeschwindigkeit in \vec{k} -Richtung transportiert

Intensität:

$$\overline{I} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt \right| = c \overline{w}_{em} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

Intensität entspricht mittlerer Energie pro Zeit und Fläche (senkrecht zu \vec{k})

Impulsdichte:

$$\vec{p}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{w_{em}}{c} \frac{\vec{k}}{k}$$

Impuls wird in \vec{k} -Richtung transportiert