8 Elektromagnetische Felder in Materie

8.1 Elektrostatik in Materie

Problem: Makroskopische Körper beinhalten $\sim 10^{23}$ Punktladungen, mikroskopische Maxwell-Gleichungen korrekt, aber ineffizient.

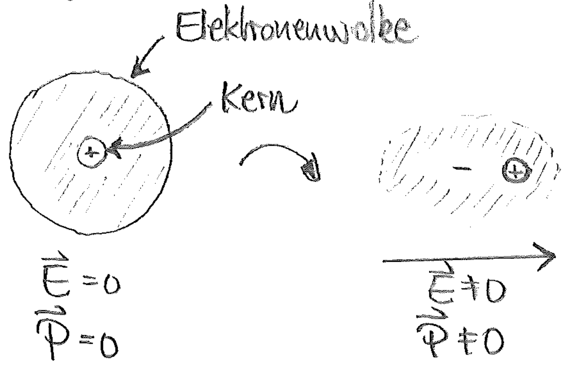
Idee: Effektive Materialbeschreibung durch Einführung materialabhängiger makroskopischer Größen

Polarisation (Dipolmoment pro Volumen):

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \vec{p}_j$$

ΔV: $a_B^3 \ll \Delta V \ll 10^{23} a_B^3$

$\vec{p}_j$: induzierte oder permanente Dipole in ΔV um $\vec{r}$



Polarisationsladungen:

$$\begin{aligned} \rho_P(\vec{r}) &= \sum_i \rho_D(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &= -\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &= -\sum_{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \vec{p}_j \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \underbrace{\vec{r}_j}_{\approx \vec{r}\,' = \text{konst. für alle } j \in \Delta V}) \end{aligned}$$

$$= - \sum_{\Delta V} \Delta V \, \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad \text{mit } \vec{r}' \in \Delta V$$

$$= - \int d^3\vec{r}' \, \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$= - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \underbrace{\left[\int d^3\vec{r}' \, \vec{P}(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') \right]}_{= \vec{P}(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_p(\vec{r}) = - \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})}$$

Durch Polarisation entstehen makroskopische Nettoladungen.

8.2 Magnetostatik in Materie

Magnetisierung (magn. Dipolmoment pro Volumen):

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \vec{m}_j$$

magnetische Dipole

Magnetisierungsstromdichte:

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = \sum_i \vec{j}_D(\vec{r}-\vec{r}_i) \quad \text{mit } \vec{j}_D(\vec{r}-\vec{r}_i) = -\vec{m}_i \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}_M(\vec{r}) = \mathrm{rot}\, \vec{M}(\vec{r})}$$

Durch Magnetisierung entstehen makroskopische Nettoströme.

8.3 Maxwell-Gleichungen in Materie

Inhomogene mikroskopische Maxwell-Gleichungen:

(I) $$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\underset{\text{freie Ladungen}}{\rho} + \underset{\text{Polarisationsladungen}}{\rho_P}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho - \frac{1}{\varepsilon_0}\,\mathrm{div}\,\vec{P}$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho$$

(II) $$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_M + \vec{J}_P\right)$$

$\vec{j}$: bewegte freie Ladungen

$\vec{J}_M$: Magnetisierungsstrom $\vec{J}_M = \mathrm{rot}\,\vec{M}$

$\vec{J}_P$: bewegte Polarisationsladungen $\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$$

Dielektrische Verschiebung:

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Magnetische Feldstärke:

$$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Maxwell-Gleichungen in Materie:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{D} = \rho && \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ &\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} && \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{aligned}}$$

Bemerkungen:

- Für lineare Medien (Dielektrika, Dia- und Paramagnetika) gelten die Materialgleichungen

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \hat{\chi}_e \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 (\mathbb{1} + \hat{\chi}_e) \vec{E} = \hat{\varepsilon} \vec{E}$$

el. Suszeptibilität

dielektrischer Tensor

und

$$\vec{M} = \hat{\chi}_m \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 (\mathbb{1} + \hat{\chi}_m) \vec{H} = \hat{\mu} \vec{H}$$

Permeabilitätstensor

- Für Ferromagnetika ist $\vec{M} \neq 0$ für $\vec{H} \to 0$.