

# 9 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

84

Bestimmungsgleichungen für Potentiale:

$$\underbrace{\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)}_{\text{D'Alembert-Operator}} \begin{pmatrix} \varphi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} c \rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{1}{c} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z \right) \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Vierervektor:

$$(x^\mu) := (ct, x, y, z) \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Vierableitung:

$$(\partial_\mu) := \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left( \frac{1}{c} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z \right)$$

Vierpotential:

$$(A^\mu) := \left( \frac{1}{c} \varphi, A_x, A_y, A_z \right)$$

Vierstromdichte:

$$(j^\mu) := (c \rho, j_x, j_y, j_z)$$

Minkowski-Metrik:

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu A^\lambda = \mu_0 j^\lambda$$

$$\lambda = 0, 1, 2, 3$$

Lorenzbedingung:

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu A^\mu = 0$$

Feldstärketensor:

$$(F^{\mu\nu}) := \left( \sum_{\lambda=0}^3 [\eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda A^\nu - \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda A^\mu] \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

antisymmetrisch

# Maxwell-Gleichungen in kovarianten Form:

(86)

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}$$

$$\sum_{\sigma=0}^3 \left( \eta^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} F^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\sigma} \partial_{\sigma} F^{\lambda\mu} + \eta^{\lambda\sigma} \partial_{\sigma} F^{\mu\nu} \right) = 0$$

## Bemerkungen:

- Viereckschreibweise macht Invarianz unter Lorentztransformationen sichtbar:  $(x^{\mu}) \mapsto \left( \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \right)$  mit  $\sum_{\lambda, \sigma} \Lambda^{\lambda}_{\mu} \eta_{\lambda\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$
- Viereckschreibweise erlaubt „natürliche“ Verallgemeinerungen: Quantenelektrodynamik, Allgemeine Relativitätstheorie