Elektrodynamik für das Lehramt — WS 22/23

Dr. L. Janssen — **3. Übung (Besprechung: 01.-07.11.22)**

1. Oberflächenintegral

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{G}(\vec{r}) = (0, 0, y)$ sowie die Fläche S, definiert als der im ersten Oktanten gelegene Teil der Ebene $6x + 3y + 2z = 12$.

(a) Geben Sie den Flächenelementvektor $\mathrm{d}\vec{S}$ an, welcher senkrecht auf S steht und ausgehend von S vom Koordinatenursprung wegzeigt.

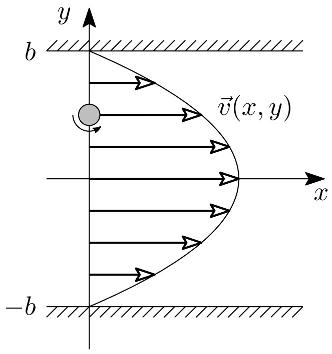
(b) Berechnen Sie den Fluss $\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{G}(\vec{r})$ des Vektorfeldes $\vec{G}$ durch die Fläche S.

2. Wirbelstärke einer Strömung

In einem Kanalbett von rechteckigem, konstantem Querschnitt sei das Strömungsprofil gegeben durch

$$\vec{v}(x, y) = v_0 \vec{e}_x (1 - y^2/b^2). \tag{1}$$

Ein kleines Stück Holz bewege sich entlang der Stromlinie $y = b/2$. Welche Strecke in x-Richtung legt es zurück, bis es sich in der Strömung einmal um sich selbst gedreht hat?



(a) Bestimmen Sie dazu zunächst die Rotation des zweidimensionalen Strömungsfeldes.

(b) Nehmen Sie dann an, dass das Stück Holz die Form eines flachen Zylinders mit Radius ρ hat und berechnen Sie die Tangentialgeschwindigkeit v_{zir} auf der Mantelfläche mit Hilfe des Satzes von Stokes,

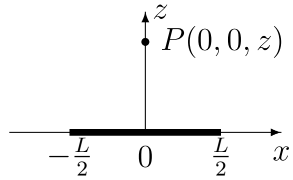
$$2\pi\rho v_{\text{zir}} := \oint \mathrm{d}\vec{\rho} \cdot \vec{v} = \int \mathrm{d}\vec{S} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}, \tag{2}$$

wobei angenommen wird, dass der Radius ρ so klein genug sei, dass die Rotation auf der gesamten Kreisfläche als konstant angesehen werden kann.

(c) Berechnen Sie schließlich die während einer vollen Umdrehung vom Stück Holz in x-Richtung zurückgelegte Strecke.

3. Elektrisches Feld eines Stabes

Gegeben sei ein homogen geladener dünner Stab (Länge L, Gesamtladung q) entlang der x-Achse von $x = -L/2$ bis $x = L/2$ und eine Probeladung Q im Punkt $P(0, 0, z)$ auf der z-Achse (siehe Zeichnung).



(a) Überzeugen Sie sich davon, dass die Raumladungsdichte durch $\rho(\vec{r}) = \lambda\Theta(\frac{L}{2} + x)\Theta(\frac{L}{2} - x)\delta(y)\delta(z)$ gegeben ist. Wie hängt die Linienladungsdichte λ mit der Gesamtladung q zusammen?

(b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(0,0,z)$ im Punkt P.

Hinweis 1: Argumentieren Sie zunächst mithilfe von Symmetrien, dass $\vec{E}(0,0,z) \parallel \vec{e}_z$ ist.
Hinweis 2: $\int \mathrm{d}u (1+u^2)^{-3/2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \text{konst.}$

(c) Was erhalten Sie im Limes $z \ll L$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem elektrischen Feld, welches durch eine Punktladung q, die sich im Ursprung befindet, am Ort P erzeugt wird.