Elektrodynamik für das Lehramt — WS 22/23

Dr. L. Janssen

13. Übung (Besprechung: 24.-30.01.23)

---

1. Ebene elektromagnetische Wellen

Gegeben seien zwei komplexe elektrische Felder $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ und $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}$, wobei $\vec{E}_0$ ein konstanter Vektor sei.

(a) Welche Bedingung muss $\vec{E}_0$ erfüllen, damit diese Felder die homogene Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{1}$$

lösen? Welche Ausbreitungsrichtung haben die Felder?

(b) Bestimmen Sie die zu den Feldern gehörigen magnetischen Flussdichten $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$.

(c) Was ergibt sich für die physikalischen Felder, wenn (i) $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ bzw. (ii) $\vec{E}_0 = E_0(\vec{e}_x + \mathrm{i}\vec{e}_y)$, wobei E_0 reell sei? Berechnen Sie jeweils die Energiedichte w und die Energiestromdichte $\vec{\mathcal{S}}$.

Hinweis: Die physikalischen Felder ergeben sich durch Bildung des Realteils der komplexen Felder.

(d) Welche physikalischen Felder ergeben sich jeweils durch Überlagerung der beiden Felder in den Fällen (i) bzw. (ii) aus (c)? Wie groß ist nun jeweils $\vec{\mathcal{S}}$?

Hinweis: Die Überlagerung erhalten Sie durch Vektoraddition der beiden Felder.

2. Wellenpakete

Das skalare Wellenfeld $u(x,t)$ genügt der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t) = 0. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie $u(x,t)$ für $t > 0$ aus den Anfangsbedingungen für $u(x,t)$ und $\dot{u}(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ zur Zeit $t = 0$,

$$u(x,0) = \alpha\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \qquad \dot{u}(x,0) = 0, \tag{3}$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle bezeichne und α und ε reelle Konstanten seien.

(b) Zeichnen Sie die Funktion $u(x,t)$ zu Zeiten $t \ll \varepsilon/c$ und $t \gg \varepsilon/c$.

Hinweis: Sie können $u(x,t)$ beispielsweise als eine Komponente eines elektrischen Feldes, welches in y- und z-Richtung homogen ist, verstehen.