

# Quantentheorie für das Lehraut

---

## Kontakt:

Lukas Janssen

Institut für Theoretische Physik

BZW/A111

lukas.janssen@tu-dresden.de

## Vorlesungswebseite:

<https://tu-dresden.de/physik/qcm/lehre/qt-ws19>

## Inhalt:

1. Grenzen der klassischen Physik
2. Ältere Quantentheorie nach Bohr und Sommerfeld
3. Schrödingers-Gleichung
4. Quantensysteme in einer Dimension
5. Dirac-Formalismus
6. Postulate der Quantenmechanik
7. Harmonischer Oszillator
8. Dipolimpuls
9. Wasserstoff-Atom
10. Fermionen und Bosonen
11. Verschränkung, Nichtlokalität und Teleportation

# 1. Grenzen der klassischen Physik

②

Ende 19. Jahrhundert: Physik scheinbar vollständig verstanden

Abgeschlossene Theoriegebäude ("klassische Physik"):

## (a) Mechanik

- Bewegung von Teilchen beschrieben durch Ort  $\vec{r}$  und Impuls  $\vec{p}$
- deterministische Zeitentwicklung aufgrund Newton'scher Gesetze

## (b) Elektrodynamik (Optik, Magnetismus)

- Elektromagnetische Strahlung beschrieben durch Wellen  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$
- Gesetzmäßigkeit: Maxwell'sche Gleichungen

## (c) Thermodynamik

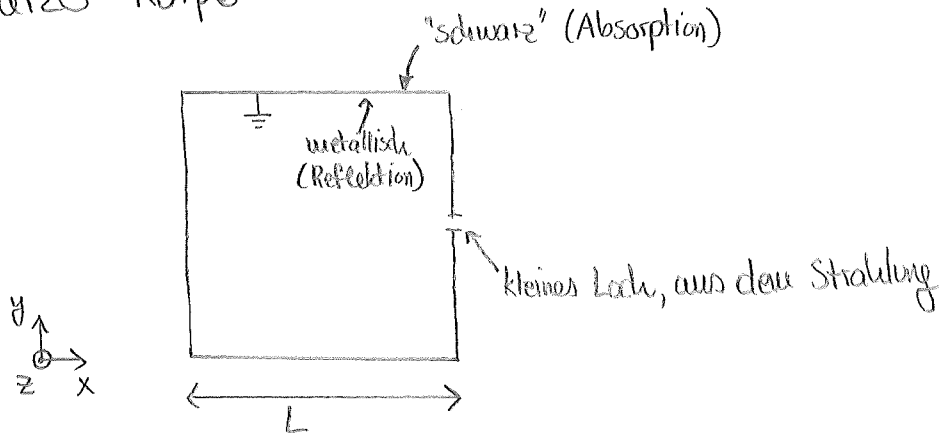
- Gemittelte Eigenschaften von Systemen aus vielen Teilchen ( $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ ) beschrieben durch wenige makroskopische Zustandsgrößen
- Mikroskopische Erklärung: statistische Mechanik

Um Jahrhundertwende 19./20. Jh.: Beobachtung von mit der klassischen Physik unvereinbaren Phänomenen

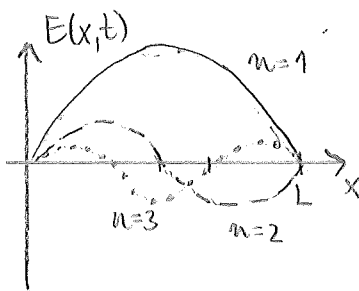
→ Ausgangspunkt für Relativitätstheorie und Quantentheorie ("moderne Physik")

# 1.1. Hohlraumstrahlung

Schwarzer Körper:



Stehende Wellen:



Wellenlängen:

$$\lambda_i = \frac{2L}{n_i} \quad \text{mit } n_i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und } i = x, y, z$$

Wellenvektor:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda_x} \\ \frac{2\pi}{\lambda_y} \\ \frac{2\pi}{\lambda_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \frac{\pi}{L}$$

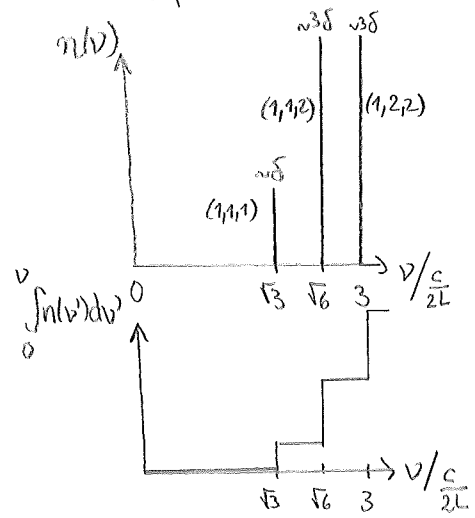
Strahlungsfrequenz:

$$\nu = c \frac{|\vec{k}|}{2\pi} = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Zustandsdichte (Anzahl der Moden im Frequenzintervall  $[\nu, \nu+d\nu]$  pro Intervallbreite  $d\nu$ ): (4)

$$n(\nu) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n_x, n_y, n_z=1}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\right)$$

↑  
Polarisation



Optische Moden ( $\lambda_i \ll L \Leftrightarrow n_i \gg 1$ ):

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} \rightarrow \int_1^{\infty} dn_i = \frac{L}{\pi} \int_{\pi/L}^{\infty} dk_i \approx \frac{L}{\pi} \int_0^{\infty} dk_i$$

↑  
 $n_i = \frac{L}{\pi} k_i$

↑  
für  $L \rightarrow \infty$

Summe:

$$n(\nu) = 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_0^{\infty} dk_x dk_y dk_z \delta\left(\nu - \frac{c}{2\pi} |k|\right)$$

$$= 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{4\pi}{8} \int_0^{\infty} dk k^2 \delta\left(\nu - \frac{c}{2\pi} k\right)$$

↑  
Kugelkoordinaten  
(k, θ, φ)

↑  
 $\frac{1}{8}$  der Kugeloberfläche

$$= 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{4\pi}{8} \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \int_0^{\infty} d\nu' \nu'^2 \delta(\nu - \nu')$$

↑  
Substitution  
 $k = \frac{2\pi}{c} \nu'$

$$= 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{4\pi}{8} \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \nu^2$$

$$= 8\pi \left(\frac{L}{c}\right)^3 \nu^2$$

Gleichverteilungssatz (klassische statistische Mechanik):

Jeder Freiheitsgrad (Mode) hat gleiche mittlere Energie  $k_B T$

Klassische spektrale Energiedichte (pro Frequenzintervall und Volumen):

$$\boxed{\varepsilon(\nu) = \frac{n(\nu)}{L^3} k_B T = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T}$$

"Rayleigh-Jeans-Formel"

Totale Energiedichte (pro Volumen):

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} d\nu \varepsilon(\nu) = 8\pi \frac{k_B T}{c^3} \int_0^{\infty} d\nu \nu^2 \rightarrow \infty \text{ (divergent!)}$$

"Ultraviolett-Katastrophe"

11.10.19

Quantisierungshypothese (Max Planck, 1901):

Nur Moden mit quantisierter Energie  $n h \nu$  mit  $n=0,1,2,\dots$  dürfen auftreten.  
(Ad-hoc-Hypothese!)

Proportionalitätskonstante (Vergleich mit Experiment):

$$\boxed{h \approx 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}$$

"Planck'sches Wirkungsquantum"

Modifizierte spektrale Energiedichte:

⑥

$$\epsilon(\nu) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

"Planck'sche Strahlungsformel"

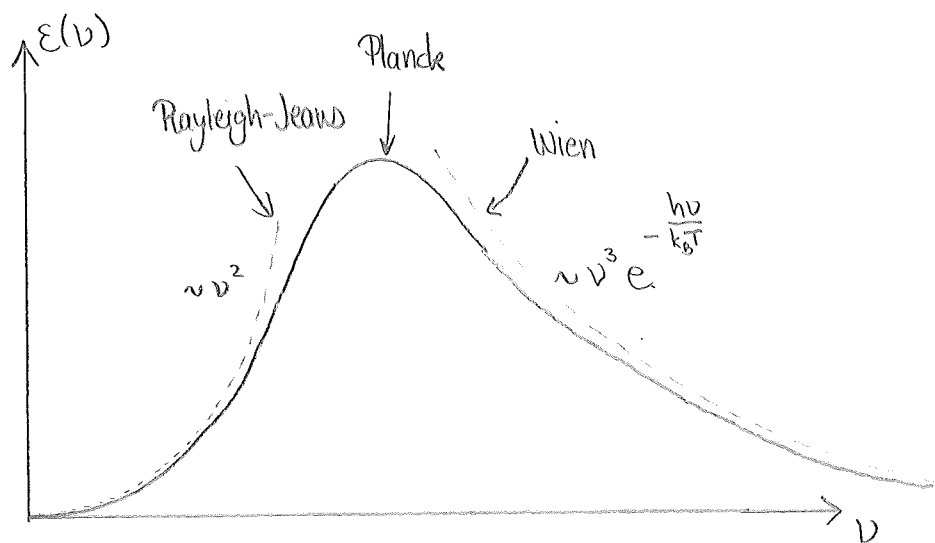
Grenzfälle:

(a)  $h\nu \ll k_B T$  : Rayleigh-Jeans-Formel

(b)  $h\nu \gg k_B T$  :

$$\epsilon(\nu) \approx 8\pi \frac{h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \quad (h\nu \gg k_B T)$$

"Wien'sches Strahlungsgesetz"



Modifizierte totale Energiedichte:

$$\epsilon = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(k_B T)^4}{c^3 h^3} \propto T^4$$

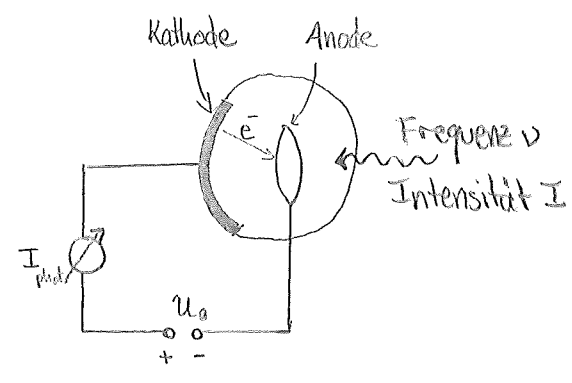
(konvergent) "Stefan-Boltzmann-Gesetz"

### Beispiele:

- Sonne als schwarzer Körper:  $T_{\odot} \approx 5700 \text{ K}$
- Kosmische Hintergrundstrahlung (Urknalltheorie):  $T_{\text{CMB}} \approx 3 \text{ K}$  (heute)

### 1.2. Photoeffekt

#### Aufbau:



#### Beobachtungen:

- (a) Photostrom nur für Lichtfrequenzen  $\nu > \nu_A$  ( $\nu_A$  abhängig von Kathodenmaterial)
- (b) Kinetische Energie der Photoelektronen:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \propto \nu - \nu_A$  (falls  $\nu > \nu_A$ ), d.h. unabhängig von Lichtintensität  $I$
- (c) Anzahl der Photoelektronen  $N_e \propto I$

Klassische Erwartung:

(a) Photostrom nur für Lichtintensitäten  $I > I_A \approx \frac{E_A}{T_0}$   
 ( $E_A$ : Austrittsarbeit,  $T_0$ : effektive Beleuchtungsdauer)

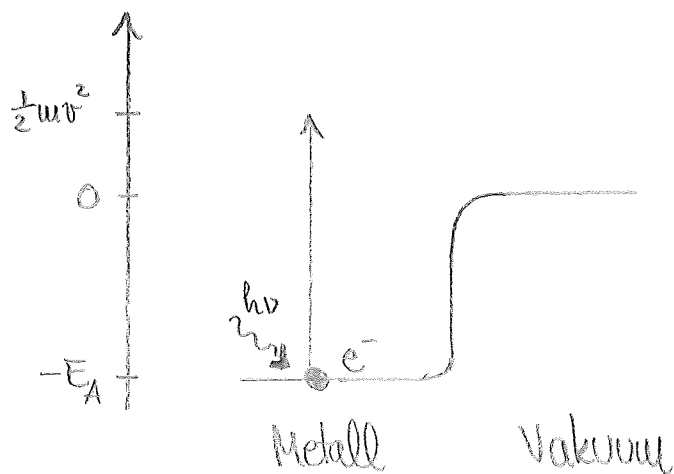
(b) Kinetische Energie der Photoelektronen  $E_{\text{kin}} \propto I - I_A$

→ Widerspruch zum Experiment!

Lichtquantenhypothese (Albert Einstein, 1905):

Elektromagnetische Strahlung besteht aus Energiequanten ("Photonen") mit Energie  $h\nu$

Erklärung des Photoeffekts:



- Energiesthaltung:  $h\nu = \frac{1}{2} m v^2 + E_A \leadsto \nu > \nu_A$  (a)
- Schwellenwert der Lichtfrequenz:  $\nu_A = E_A/h \leadsto E_{\text{kin}} \propto \nu - \nu_A$  (b)
- Anzahl der Photoelektronen:  $N_e \propto N_{\text{phot}} \propto I$  (c)



# Energie-Impuls-Relation (Photonen):

$$E^2 = p^2 c^2 + \underbrace{m_0^2 c^4}_{=0 \text{ (für } v=c)} = p^2 c^2 \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Mit  $\omega = 2\pi\nu$  und  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ :

$$E = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \quad \text{und} \quad p = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k$$

Planck-Einstein-Relationen

"Teilchen"

"Welle"

"Teilchen"

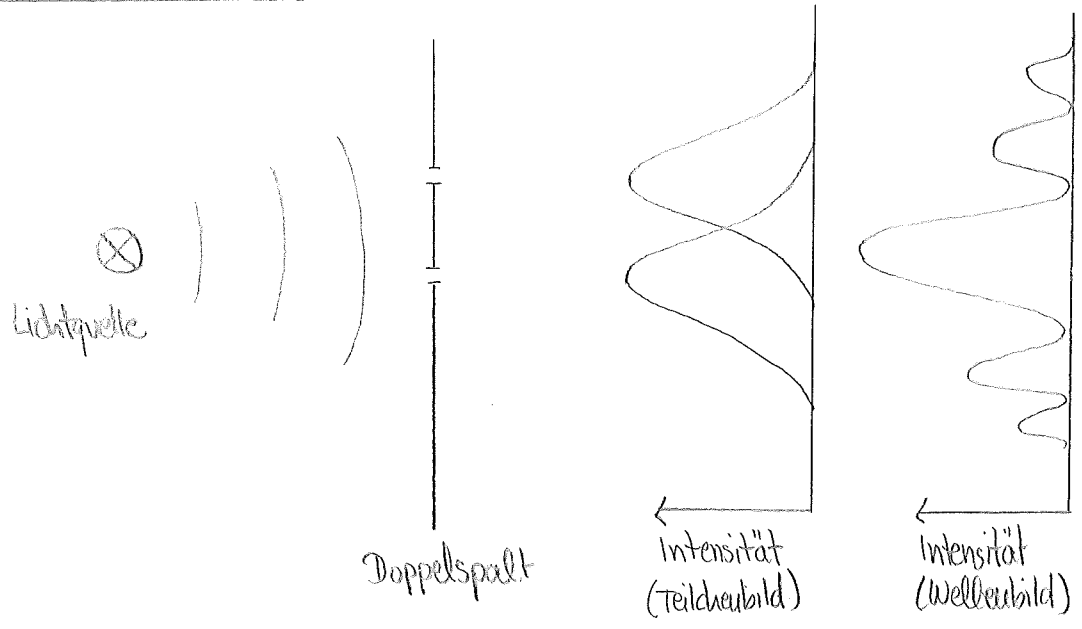
"Welle"

wobei

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum

## 1.3. Doppelspalt-Experiment



### Welle-Teilchen-Dualität:

Licht weist Eigenschaften von sowohl klassischen Wellen als auch klassischen Teilchen auf

Materiewellenhypothese (de Broglie, 1923):

Welle-Teilchen-Dualität gilt auch für Materieteilchen.

De-Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

↑ Masse    ↑ Geschwindigkeit

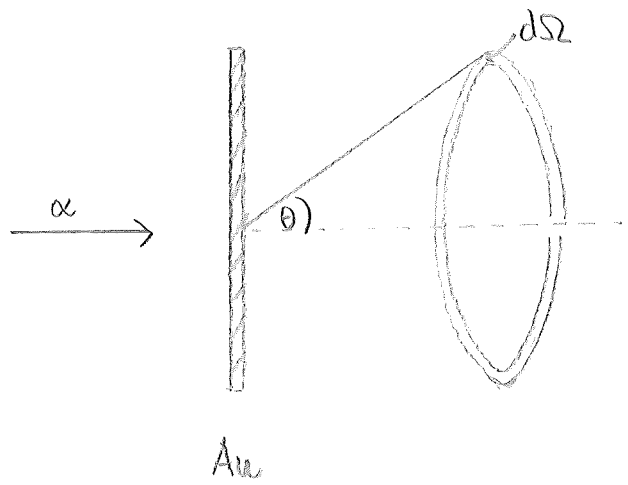
Experimentelle Bestätigung (1927): Doppelspaltexperimente mit Elektronen

Heutiges Verständnis (Quantenfeldtheorie):

Licht und Materie sind Anregungen von Quantenfeldern.

### 1.4. Versagen des Rutherford'schen Atommodells

Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an dünner Goldfolie:



Differentieller Wirkungsquerschnitt ("effektive Trefferfläche" pro Raumwinkel):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

"Rutherford'sche Streuformel"  
(analog Kepler-Problem)

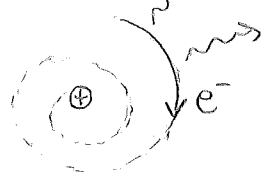
# Klassische Erklärung (Rutherford, 1911):

Atome bestehen aus positiv geladenen Kernen und einer Hülle aus negativ geladenen Elektronen, die sich im Coulomb-Potential  $V(\vec{r}) \propto \frac{1}{|\vec{r}|}$  des Kerns auf elliptischen Bahnen bewegen.

## Probleme des Rutherford'schen Atommodells:

(a) Widerspruch zur klassischen Elektrodynamik:

Beschleunigte Ladungen strahlen  $\rightarrow$  Elektron verliert Energie und fällt nach kurzer Zeit in den Kern ( $\sim 10^{-11}$ s)



(b) Keine Erklärung für diskrete Atomspektren, z.B. für Wasserstoff:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \text{ mit } n, m \in \mathbb{N} \text{ und } m > n$$

↑  
Rydberg-Konstante

"Rydberg-Formel" (empirisch!)

17.10.19