Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen **1. Übung (Besprechung: 21.-23.10.19)**

1. Komplexe Matrixfunktion

Betrachten Sie die Matrix

$$H = \hbar\Omega \begin{pmatrix} \cos\phi & -i\sin\phi \\ i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte ε_n und die dazugehörigen (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{\Psi}_n$ mit $n = 1, 2$. Orthonormieren Sie die Eigenvektoren, so dass gilt:

$$\mathbf{\Psi}_n^\dagger \mathbf{\Psi}_m = \delta_{nm}, \tag{2}$$

mit $\mathbf{\Psi}_n^\dagger = (\mathbf{\Psi}_n^\top)^*$.

(b) Benutzen Sie die Eigenvektoren, um die Basistransformationsmatrix T zu konstruieren, welche die Matrix H diagonalisiert,

$$H = T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{3}$$

(c) Berechnen Sie damit die Matrixfunktion

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}. \tag{4}$$

wobei die Exponentialfunktion über die übliche Potenzreihenentwicklung definiert ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Matrixfunktion $U(t)$ der Matrix-Differentialgleichung

$$i\hbar\partial_t U(t) = HU(t) \tag{5}$$

genügt.

2. Eindimensionale Diffusion

Die Dichte $\rho(x,t)$ genüge der eindimensionalen Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho(x,t) + \partial_x j(x,t) = 0 \tag{6}$$

mit dem dazugehörigen Strom $j(x,t)$, für welchen das 1. Fick'sche Gesetz gelte,

$$j(x,t) = -D\partial_x\rho(x,t), \tag{7}$$

mit der Diffusionskonstanten D. Somit ergibt sich für die Dichte $\rho(x,t)$ die Diffusionsgleichung

$$\partial_t\rho(x,t) - D\partial_x^2\rho(x,t) = 0. \tag{8}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Fourieransatzes

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \rho(k,t), \tag{9}$$

dass die Fourierkomponenten (für festes k) der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\partial_t \rho(k,t) = -Dk^2 \rho(k,t) \tag{10}$$

genügen.

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung.

(c) Nun sei als Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ die Dichte durch eine Delta-Funktion beschrieben,

$$\rho(x, t = 0) = \delta(x), \tag{11}$$

wobei $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$. Bestimmen Sie $\rho(x,t)$ für $t > 0$ und diskutieren Sie das Ergebnis.
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ak^2+ibk} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{-b^2/(4a)}$ für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

Link zur Vorlesungsseite: `https://tu-dresden.de/physik/qcm/lehre/qt-ws19`