Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen **2. Übung (Besprechung: 28.-30.10.19)**

1. Eindimensionale Wellengleichung

Gegeben sei die eindimensionale Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - v^2 \partial_x^2) u(x,t) = 0 \tag{1}$$

für die reelle Funktion $u(x,t)$.

(a) Verwenden Sie den Ansatz $u(x,t) = \phi(x)\cos(\omega t + \alpha)$ mit einer konstanten Phase α und einer festen Frequenz ω. Welcher Differentialgleichung genügt die Funktion $\phi(x)$? Wie lautet die allgemeine Lösung für $\phi(x)$ für einen gegebenen Wellenvektor $k = \omega/v$?

(b) Betrachten Sie nun das Randwertproblem im Intervall $x \in [-L/2, L/2]$ unter Annahme von

  (i) Dirichlet Randbedingungen $\phi(\pm L/2) = 0$ bzw.

  (ii) Neumann Randbedingungen $\phi'(\pm L/2) = 0$.

  Welche Werte von k sind jeweils erlaubt?

(c) Skizzieren Sie die vier niedrigsten Anregungsmoden $\phi(x)$ als Funktion von x für die beiden Fälle (i) und (ii).

2. Phasenraum und gebundene Bewegungen

Betrachten Sie die eindimensionale gebundene Bewegung eines Teilchens der Masse m mit Ort x und Impuls p. Die Energie des Teilchens ist gegeben durch

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{2}$$

mit dem Potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.

(a) Bestimmen Sie für feste Energie E die Funktion $p(x)$ durch Auflösen der Gleichung (2). Skizzieren Sie die gebundene Bewegung im Phasenraum (p, x).

(b) Berechnen Sie die durch die Bahnkurve eingeschlossene Fläche im Phasenraum

$$\mathcal{A}(E) = \oint dx\, p(x) = 2 \int_{x_-}^{x_+} dx p(x), \tag{3}$$

wobei $x_\pm$ mit $V(x_\pm) = E$ die beiden Umkehrpunkte der gebundenen Bewegung sind.
Hinweis: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von $p = m\dot{x}$ und Trennung der Variablen, dass die Periode T der gebundenen Bewegung gegeben ist durch

$$\frac{T(E)}{2} = \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{m}{p(x)}. \tag{4}$$

Berechnen Sie das Integral und bestimmen Sie $T(E)$.
Hinweis: $\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{1-x^2} = \pi$.

(d) Zeigen Sie anhand der Definitionen, dass allgemein für beliebige eindimensionale periodische Bewegungen gilt

$$\frac{d\mathcal{A}(E)}{dE} = T(E), \tag{5}$$

woraus die in der Vorlesung benutzte Identität

$$\oint_{H(x,p)=E} dx\, p = \int_{E_{\min}}^{E} \frac{dE'}{\nu(E')} \tag{6}$$

mit der Frequenz $\nu(E) = \frac{1}{T(E)}$ und der kleinsten klassisch erlaubten Energie $E_{\min}$ folgt.

3. Eigenwerte und Eigenvektoren

Betrachten Sie die drei Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(a) Bestimmen Sie deren Eigenwerte und Eigenvektoren.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Matrix gilt $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ mit $i = x, y, z$. Wie kann man diese Eigenschaft aus den Eigenwerten folgern?