Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen

4. Übung (Besprechung: 11.-13.11.19)

1. Gauß'sches Wellenpaket

Betrachten Sie die komplexe Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ in einer räumlichen Dimension als Funktion der Koordinate x und der Zeit t. Zur Zeit $t=0$ ist sie gegeben durch

$$\Psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4}} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}. \tag{1}$$

Das Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\Psi(x,t=0)|^2$, also die Wahrscheinlichkeitsverteilung entlang der x-Achse zum Zeitpunkt $t=0$, ist gerade ein Gauß'sche Normalverteilung, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x,t=0)|^2 = 1$ gilt.

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle_t$, $\langle x^2\rangle_t$ und $\langle \hat{p}\rangle_t$ zum Zeitpunkt $t=0$ mit der Definition $\langle \hat{O}\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x,t)\hat{O}\Psi(x,t)$ und $\hat{p} \to -i\hbar\partial_x$.

Hinweis: Sie können partielle Integration benutzen, um $\langle x^2\rangle_t$ zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte, d.h. die Wellenfunktion zur Zeit $t=0$ im Impulsraum, $\Psi(p,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar}\Psi(x,t=0)$.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-A\frac{(x-z)^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}$ mit $\mathrm{Re}\{A\} > 0$ für beliebiges komplexes z.

(c) Die Wellenfunktion entwickelt sich in der Zeit gemäß der Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t). \tag{2}$$

Berechnen Sie die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t>0$.

Hinweis: Es ist hilfreich zunächst die Schrödingergleichung im Impulsraum für $\Psi(p,t)$ zu lösen. Das Ergebnis erhält man dann mit Hilfe der Rücktransformation $\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar}\Psi(p,t)e^{ikx}$. Lösung:

$$\Psi(x,t) = e^{i(p_0 x - i\frac{p_0^2}{2m}t)/\hbar} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma^2 + i\hbar t/(2m)}} \exp\left[-\frac{(x-\frac{p_0}{m}t)^2}{4(\sigma^2 + i\hbar t/(2m))}\right]. \tag{3}$$

(d) Zeigen Sie, dass das Betragsquadrat der Wellenfunktion für alle $t \geq 0$ die Form einer Normalverteilung hat

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-v_0 t)^2}{2\sigma(t)^2}}. \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_0 mit der sich das Gauß'sche Wellenpaket bewegt und die Zeitabhängigkeit der Breite $\sigma(t)$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle_t$, $\langle x^2\rangle_t$ und $\langle \hat{p}\rangle_t$ für endliche $t>0$.

2. Kommutatoren

Beim Übergang zur Quantenmechanik sind Ort und Impuls durch lineare Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ zu ersetzen, die der fundamentalen Vertauschungsrelation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \tag{5}$$

genügen. Hier betrachten wir einfachheitshalber nur den Ort und Impuls in einer Dimension entlang der x-Achse.

(a) In der Ortsdarstellung gelten nach dem Korrespondenzprinzip die Ersetzungsregeln $\hat{x} \to x$ und $\hat{p} \to -i\hbar\partial_x$ für die beiden Operatoren. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die fundamentale Vertauschungsrelation in dieser Darstellung erfüllt wird. Andererseits gelten in der Impulsdarstellung die Ersetzungsregeln $\hat{x} \to i\hbar\partial_p$ und $\hat{p} \to p$. Zeigen Sie, dass auch in dieser Darstellung die Vertauschungsrelation gilt, indem Sie den Kommutator (5) auf eine beliebige Wellenfunktion $\Psi(p)$ im Impulsraum anwenden.

(b) Gegeben sei eine Funktion der Koordinate, $f(x)$. Berechnen Sie den Kommutator

$$\hat{K} = [f(\hat{x}), \hat{p}]. \tag{6}$$

Verwenden Sie hierfür die Ortsdarstellung und betrachten Sie die Wirkung des Operators $\hat{K}$ in dieser Darstellung auf eine beliebige Wellenfunktion $\Psi(x)$.