Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

DR. L. JANSSEN

5. Übung (Besprechung: 18.11.19)

---

1. Eigenschaften des Kommutators

(a) Zeigen Sie, dass der Kommutator die Produktregel

$$[\hat{X}, \hat{Y}\hat{Z}] = \hat{Y}[\hat{X}, \hat{Z}] + [\hat{X}, \hat{Y}]\hat{Z} \tag{1}$$

für beliebige Operatoren $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ erfüllt.

(b) Verifizieren Sie die Jacobi-Identität

$$[\hat{X}, [\hat{Y}, \hat{Z}]] + [\hat{Y}, [\hat{Z}, \hat{X}]] + [\hat{Z}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = 0. \tag{2}$$

(c) Betrachten Sie die Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ mit

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und zeigen Sie, dass

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z, \qquad [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x, \qquad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y. \tag{4}$$

(d) Welche Identität für die Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ folgt aus der Jacobi-Identität (b), wenn $\hat{X} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{x}$, $\hat{Y} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{y}$, $\hat{Z} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{z}$? Hierbei sei $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ der Vektor von Pauli-Matrizen.

2. Darstellungsunabhängige Orts-Impuls-Kommutatoren

Gegeben sei der fundamentale Orts-Impuls-Kommutator in einer Dimension, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, und eine Funktion der Koordinate, $f(x)$. Berechnen Sie den Kommutator

$$\hat{K} = [f(\hat{x}), \hat{p}] \tag{5}$$

ohne Verwendung einer expliziten Darstellung. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 2(b) der 4. Übung.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $f(x)$ eine Taylor-Entwicklung besitzt und zeigen Sie darstellungsunabhängig, dass $[\hat{x}^n, \hat{p}] = in\hbar\hat{x}^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

3. Unschärfe des Gauß'schen Wellenpaketes

Betrachten Sie das eindimensionale Gauß'sche Wellenpaket im Orts- und Impulsraum zum Zeitpunkt $t = 0$,

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4}} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}, \qquad \Psi(p) = \sqrt{2\sigma}(2\pi)^{1/4} e^{-\sigma^2\left(\frac{p-p_0}{\hbar}\right)^2}. \tag{6}$$

(a) Bestimmen Sie die Schwankungsquadrate von Ort und Impuls, $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$, $(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$, und zeigen Sie, dass das Gauß'sche Wellenpaket die Unschärferelation minimal erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 1(a) der 4. Übung.

(b) Diskutieren Sie die Limites $\sigma \to 0$ und $\sigma \to \infty$ in Orts- und Impulsraum.