Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

DR. L. JANSSEN

6. Übung (Besprechung: 25./27.11.19)

1. Freier Fall

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m unter dem Einfluss einer konstanten Schwerebeschleunigung g. Die Bewegung entlang der x-Achse wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + mg\hat{x}. \tag{1}$$

(a) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung in der Impulsraum-Darstellung

$$\hat{H}\Psi(p) = E\Psi(p) \tag{2}$$

mit Hilfe der Ersetzungen $\hat{p} \to p$ und $\hat{x} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ und bestimmen Sie die Eigenfunktionen $\Psi(p)$.
Hinweis: Die resultierende Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

(b) Die Wellenfunktion im Ortsraum erhalten Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ipx/\hbar}\Psi(p). \tag{3}$$

Bestimmen Sie das Verhalten von $\Psi(x)$ für $x \to -\infty$. Führen Sie hierfür den charakteristischen Impuls $p_0 = \hbar(2gm^2/\hbar^2)^{1/3}$ ein und nutzen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} e^{ist+is^3/3} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(-t)^{1/4}} \cos[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}]$ für $t \to -\infty$.

2. Unendlich hoher Potentialkasten

Gegeben sei das Potential des unendlich hohen Potentialkastens

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| < L/2 \\ \infty & \text{für} \quad |x| \geq L/2 \end{cases} \tag{4}$$

Betrachten Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung in der Ortsraum-Darstellung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{5}$$

(a) Welche Randbedingungung folgt für die Wellenfunktion bei $x = \pm L/2$, wenn man Stetigkeit der Wellenfunktion $\Psi(x)$ fordert? Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit Hilfe dieser Randbedingung und bestimmen Sie deren Eigenenergien E_n mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $E_n < E_{n+1}$.

(b) Bestimmen Sie insbesondere die normierte Wellenfunktion $\Psi_1(x)$ des Grundzustandes, d.h. des Zustandes mit der kleinsten Eigenenergie E_1. Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfe im Grundzustand, Δx und Δp, und vergleichen Sie deren Produkt mit der Unschärferelation.

3. Ehrenfest-Relationen

(a) Der Zustand $\Psi(x,t)$ erfülle die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t). \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert eines (nicht explizit zeitabhängigen) Operators $\hat{A}$ im Zustand $\Psi(x,t)$ die Relation $\frac{d}{dt}\langle \hat{A}\rangle_t = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H},\hat{A}]\rangle_t$ gilt.

(b) Betrachten Sie im Folgenden den Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ für den eindimensionalen Ortsoperator $\hat{x}$ entlang der x-Achse und den dazugehörigen Impuls-Operator $\hat{p}$. Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Orts-Erwartungswertes $\langle \hat{x}\rangle_t$ und zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt}\langle \hat{x}\rangle_t = \langle \frac{\hat{p}}{m}\rangle_t$.
Hinweis: Verwenden Sie die Kommutator-Produktregel (Aufgabe 1(a) der 5. Übung).

(c) Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Impuls-Erwartungswertes $\langle \hat{p}\rangle_t$ und zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt}\langle \hat{p}\rangle_t = -\langle V'(\hat{x})\rangle_t$ mit der Ableitung $V'(x) \equiv \partial_x V(x)$.
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2 der 5. Übung.

(d) Die Resultate aus Teil (b) und (c) sind als Ehrenfest-Relationen bekannt. Vergleichen Sie diese mit den klassischen Hamilton-Gleichungen. Überzeugen Sie sich davon, dass $\langle \hat{x}\rangle_t$ die klassischen Gleichungen nur im Spezialfall, wenn $\langle V'(\hat{x})\rangle_t = V'(\langle \hat{x}\rangle_t)$ gilt, erfüllt.