Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen

7. Übung (Besprechung: 02./04.12.19)

---

1. Reflektion an der Potentialstufe

Betrachten Sie das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ V & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

mit $V > 0$. Diskutieren Sie die Lösung der stationären eindimensionalen Schrödingergleichung mit Hilfe des allgemeinen Ansatzes

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_{\mathrm{I}+}\, e^{ik_{\mathrm{I}}x} + A_{\mathrm{I}-}\, e^{-ik_{\mathrm{I}}x} & \text{für} \quad x < 0, \\ A_{\mathrm{II}+}\, e^{ik_{\mathrm{II}}x} + A_{\mathrm{II}-}\, e^{-ik_{\mathrm{II}}x} & \text{für} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Wie hängen die Wellenvektoren k_{I} und k_{II} von der Energie E ab? Wie lautet die Transfermatrix, die die Amplituden in den beiden Bereichen miteinander verknüpft?

(b) Betrachten Sie Energien $0 < E < V$ mit imaginärem $k_{\mathrm{II}} = i\kappa$ und $\kappa > 0$. Warum muss $A_{\mathrm{II}-} = 0$ gesetzt werden? Machen Sie den Ansatz $A_{\mathrm{I}+} = 1$ und bestimmen Sie $A_{\mathrm{I}-}$. Zeigen Sie, dass $|A_{\mathrm{I}-}| = 1$. Betrachten Sie den Grenzfall $V \to \infty$ und diskutieren Sie das Ergebnis für $A_{\mathrm{I}-}$.

2. Gebundener Zustand des Delta-Potentials

Betrachten Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung mit Delta-Potential

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) - \frac{\hbar^2}{ma}\delta(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \tag{3}$$

wobei $a > 0$ (attraktives Potential).

(a) Diese Gleichung besitzt eine gebundene Lösung. Zeigen Sie durch explizites Einsetzen, dass diese die Form $\Psi(x) = Ae^{-\kappa|x|}$ hat. Bestimmen Sie κ und die Eigenenergie E des gebundenen Zustandes.
Hinweis: Es gilt für die zweite Ableitung $\partial_x^2|x| = 2\delta(x)$. (Warum?)

(b) Bestimmen Sie die Konstante A so, dass $\Psi(x)$ normiert ist. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ in diesem Zustand. Bestimmen Sie das Produkt $\Delta x \Delta p$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Unschärferelation.