Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen **8. Übung (Besprechung: 09./11.12.19)**

---

1. Transmission an der Potentialstufe

Betrachten Sie das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ V & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

mit $V > 0$. Diskutieren Sie die Lösung der stationären eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für Energien $E > V$ mit Hilfe des allgemeinen Ansatzes

$$\psi(x) = \begin{cases} A_{\mathrm{I}+}e^{ik_{\mathrm{I}}x} + A_{\mathrm{I}-}e^{-ik_{\mathrm{I}}x} & \text{für} \quad x < 0, \\ A_{\mathrm{II}+}e^{ik_{\mathrm{II}}x} + A_{\mathrm{II}-}e^{-ik_{\mathrm{II}}x} & \text{für} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie zunächst mit Hilfe des allgemeinen Ansatz (2) die Wahrscheinlichkeitsstromdichte in den beiden Bereichen $x > 0$ und $x < 0$.

Hinweis: Die Anschlussbedingungen (Transfermatrix) müssen noch nicht verwendet werden.

(b) Betrachten Sie den Fall einer von links einfallenden Stromdichte, die auf eins normiert ist. Wie lautet dann die Amplitude $A_{\mathrm{I}+}$? Welche Amplitude im Bereich $x > 0$ verschwindet in diesem Fall? Wie hängen $A_{\mathrm{I}-}$ und $A_{\mathrm{II}+}$ mit der Reflektions- und Transmissionsamplitude, r und t, zusammen?

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $|r|^2 + |t|^2 = 1$. (Wahrscheinlichkeitserhaltung!)

(c) Berechnen Sie die beiden Amplituden r und t. Diskutieren Sie den Grenzfall $V \to 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Transfermatrix aus der Vorlesung (oder Übungsaufgabe 7.1).

2. Streuung am Delta-Potential

Betrachten Sie die stationäre eindimensionale Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{\hbar^2}{ma}\delta(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{3}$$

mit einem Delta-Potential; die Streulänge a kann sowohl positiv als auch negativ sein, d.h. das Potential kann sowohl repulsiv als auch attraktiv sein.

(a) Berechnen Sie für die Koeffizienten des allgemeinen Ansatzes

$$\psi(x) = \begin{cases} A_{\mathrm{I}+}e^{ikx} + A_{\mathrm{I}-}e^{-ikx} & \text{für} \quad x < 0, \\ A_{\mathrm{II}+}e^{ikx} + A_{\mathrm{II}-}e^{-ikx} & \text{für} \quad x > 0, \end{cases} \tag{4}$$

mit dem Wellenvektor $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ die Transfermatrix M, die die Koeffizienten miteinander verknüpft,

$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{II}+} \\ A_{\mathrm{II}-} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{\mathrm{I}+} \\ A_{\mathrm{I}-} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Anschlussbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion an der Delta-Sprungstelle: $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2}{a}\psi(0)$.

Kontrollergebnis: $M = \begin{pmatrix} \frac{ika+1}{ika} & \frac{1}{ika} \\ -\frac{1}{ika} & \frac{ika-1}{ika} \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von M die Reflektions- und Transmissionsamplitude, r und t, für den Fall einer von links einfallenden Stromdichte.

Kontrollergebnis: $t = \frac{ak}{i+ak}$, $r = \frac{-i}{i+ak}$.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x)|^2$ für $x < 0$. Diskutieren Sie den Grenzfall $ak \to 0$. Diskutieren Sie weiterhin den Grenzfall $ak \to \infty$ und bestimmen Sie $|\psi(x)|^2$ bis zur ersten Ordnung in $1/(ak)$. Wie unterscheiden sich in diesem Grenzfall attraktives und repulsives Potential?

(d) In der Vorlesung wurde für das Kastenpotential $V(x) = V$ für $|x| < L/2$ und $V(x) = 0$ für $|x| > L/2$ folgende Transmissionswahrscheinlichkeit für den Fall $0 < E < V$ hergeleitet:

$$T_{\text{Kasten}} = \frac{E(V-E)}{E(V-E) + \frac{V^2}{4}\sinh^2(\sqrt{2m(V-E)}L/\hbar)}. \tag{6}$$

Betrachten Sie den Grenzfall $V \to \infty$ und $L \to 0$ mit festem $VL = \frac{\hbar^2}{ma}$ und zeigen Sie, dass in diesem Limes T_{Kasten} das Ergebnis $T = |t|^2$ für das Delta-Potential reproduziert.