Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen **9. Übung (Besprechung: 16./18.12.19)**

1. Qubit-Zustände

Der Zustand eines Quantenbits (Qubit) ist im Allgemeinen gegeben durch die Superposition zweier orthornormierter Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$,

$$|\varphi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle \tag{1}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ und $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Entwicklungskoeffizienten des Zustandes $|\varphi\rangle$ als Skalarprodukte $\alpha_1 = \langle 0|\varphi\rangle$ und $\alpha_2 = \langle 1|\varphi\rangle$ schreiben lassen.

Hinweis: Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation der Basis, $\mathbb{1} = \sum_{\ell=0,1} |\ell\rangle\langle\ell|$.

(b) Rechenoperationen werden mit Hilfe sogenannter Quantengatter durchgeführt. Ein Quantengatter ist eine unitäre Operation U, die auf ein Qubit wirkt:

$$|\varphi\rangle \longrightarrow |\varphi'\rangle = U|\varphi\rangle \quad \text{mit} \quad U^\dagger = U^{-1}. \tag{2}$$

Das Qubit aus Gleichung (1) kann nach einer Anwendung eines Quantengatters wieder mit Hilfe der kanonischen Basis dargestellt werden,

$$|\varphi'\rangle = U|\varphi\rangle = \alpha_1'|0\rangle + \alpha_2'|1\rangle. \tag{3}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation die Matrix (U_{nm}), mit der sich die Entwicklungskoeffizienten $\alpha_1 = \langle 0|\varphi\rangle$ und $\alpha_2 = \langle 1|\varphi\rangle$ des Qubits transformieren,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = (U_{nm}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

mit $\alpha_1' = \langle 0|\varphi'\rangle$ und $\alpha_2' = \langle 1|\varphi'\rangle$. Zeigen Sie, dass aus der Unitarität des Operators U die Unitarität der Matrix (U_{nm}) folgt.

Hinweis: Die Transformation der Entwicklungskoeffizienten lässt sich mit Hilfe der Einstein'schen Summenkonvention auch kurz schreiben als $\alpha_n' = U_{nm}\alpha_m$.

(c) Als Beispiel betrachten Sie das Hadamard-Gatter, das die beiden Qubit-Zustände folgendermaßen transformiert:

$$|0\rangle \to |+\rangle := U_\mathrm{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \tag{5}$$

$$|1\rangle \to |-\rangle := U_\mathrm{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \tag{6}$$

Wie lautet die entsprechende Transformationsmatrix $(U_{\mathrm{H}nm})$ für die Entwicklungskoeffizienten?

2. Zwei-Qubit-Quantengatter

Eine Basis für den Hilbert-Raum von zwei Qubits, A und B, ist gegeben durch die vier Basisvektoren

$$|\psi_1\rangle = |00\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |01\rangle, \quad |\psi_3\rangle = |10\rangle, \quad |\psi_4\rangle = |11\rangle \tag{7}$$

mit $|00\rangle = |0_A\rangle \otimes |0_B\rangle$, $|01\rangle = |0_A\rangle \otimes |1_B\rangle$, etc. (Die Schreibweise $|m_A\rangle \otimes |n_B\rangle$ drückt aus, dass sich das Qubit A im Zustand $|m\rangle$ und das Qubit B im Zustand $|n\rangle$ befindet.) Ein allgemeiner Zustand ist gegeben durch eine Superposition

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{4} \alpha_n |\psi_n\rangle \tag{8}$$

mit komplexen Koeffizienten α_n, $n = 1, \ldots, 4$. Durch die Anwendung einer Zwei-Qubit-Operation auf den Zustand $|\Psi\rangle$ ergibt sich ein neuer Zustand $|\Psi'\rangle = \sum_n \alpha'_n |\psi_n\rangle$ mit Entwicklungskoeffizienten α'_n. Bestimmen Sie für folgende Operationen die Transformationsmatrix (U_{nm}) für die Entwicklungskoeffizienten $\alpha'_n = U_{nm}\alpha_m$ und überprüfen Sie, ob es sich um Zwei-Qubit-Quantengatter handelt, d.h. ob (U_{nm}) unitär ist.

(a) *SWAP-Operation* U_{SWAP}. Die Werte der beiden Qubits werden vertauscht:

$$|00\rangle \to |00\rangle, \quad |01\rangle \to |10\rangle, \quad |10\rangle \to |01\rangle, \quad |11\rangle \to |11\rangle. \tag{9}$$

(b) *CNOT-Operation* U_{CNOT}. Der Wert des zweiten Qubit wird in Abhängigkeit vom ersten Qubit beibehalten oder negiert:

$$|00\rangle \to |00\rangle, \quad |01\rangle \to |01\rangle, \quad |10\rangle \to |11\rangle, \quad |11\rangle \to |10\rangle. \tag{10}$$

(c) *AND/XOR-Operation* $U_{\mathrm{AND/XOR}}$. Das erste Ausgangs-Qubit ist das logische UND der beiden Eingangs-Qubits, und das zweite Ausgangs-Qubit ist das logische XOR der beiden Eingangs-Qubits:

$$|00\rangle \to |00\rangle, \quad |01\rangle \to |01\rangle, \quad |10\rangle \to |01\rangle, \quad |11\rangle \to |10\rangle. \tag{11}$$

3. Produktzustände

Betrachten Sie einen allgemeinen Zustand eines Zwei-Qubit-Systems,

$$|\Psi\rangle = \gamma_{00}|00\rangle + \gamma_{10}|10\rangle + \gamma_{01}|01\rangle + \gamma_{11}|11\rangle \tag{12}$$

mit komplexen Entwicklungskoeffizienten $\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{01}, \gamma_{11} \in \mathbb{C}$. Welche Bedingung müssen diese Koeffizienten erfüllen, so dass der Zustand $|\Psi\rangle$ die Form eines Produktzustandes einnimmt, d.h., $|\Psi\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ mit

$$|\varphi_A\rangle = \alpha_1|0_A\rangle + \alpha_2|1_A\rangle, \qquad |\varphi_B\rangle = \beta_1|0_B\rangle + \beta_2|1_B\rangle, \tag{13}$$

und der Konvention $|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle = |00\rangle$, $|0_A\rangle \otimes |1_B\rangle = |01\rangle$, etc.