Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

DR. L. JANSSEN

10. Übung (Besprechung: 06./08.01.20)

---

1. Messung eines Qubits

Betrachten Sie ein Qubit, das sich zur Zeit $t_0 = 0$ im Zustand $|0\rangle$ befindet. Die Zeitentwicklung dieses Qubits wird durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \right) \tag{1}$$

bestimmt.

(a) Bestimmen Sie die zwei Eigenwerte ε_n und Eigenzustände $|\alpha_n\rangle$ mit $n = 1, 2$ des Hamilton-Operators.
Hinweis: Nutzen Sie, dass sich die Eigenwertsgleichung $\hat{H}|\alpha_n\rangle = \varepsilon_n|\alpha_n\rangle$ durch Multiplikation mit dem Bra $\langle i|$ von links und mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathbb{1}$ auf die Matrixgleichung $\sum_{j=0,1} \langle i|\hat{H}|j\rangle\langle j|\alpha_n\rangle = \varepsilon_n \langle i|\alpha_n\rangle$ reduzieren lässt. Lösen Sie das gegebene Problem durch Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $(\langle i|\hat{H}|j\rangle)$.

(b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle$ des Qubits für $t > 0$ mit der Anfangsbedingung $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$.
Hinweis: Zerlegen Sie den Zustand des Qubits bei $t_0 = 0$ in Eigenzustände des Hamilton-Operators.

(c) Es soll eine Messung der Observable $\hat{A} = |1\rangle\langle 1|$ durchgeführt werden. Was sind die beiden möglichen Messergebnisse? Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten zu einer gegebenen Zeit $t > 0$ diese Messergebnisse zu messen? Zu welchen Zeiten sind diese Wahrscheinlichkeiten jeweils maximal?

(d) Zur Zeit $t_1 > 0$ wird eine Messung des Operators $\hat{A}$ durchgeführt. Danach wird die Zeitentwicklung des Qubits wieder durch $\hat{H}$ bestimmt. Wie lauten die beiden möglichen Wellenfunktionen zur Zeit $t > t_1$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer zweiten Messung von $\hat{A}$ zur Zeit $t_2 > t_1$ dasselbe Ergebnis wie bei der ersten Messung zur Zeit t_1? Bei welchem zeitlichen Abstand $t_2 - t_1 > 0$ sind diese Wahrscheinlichkeiten maximal?

2. Messung eines Teilchens

Der Zustand eines Teilchens in einer Raumdimension sei beschrieben durch die Wellenfunktion $\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi x}{L} & \text{für} \quad |x| < L/2, \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq L/2. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Es wird eine Messung durchgeführt, die überprüft, ob sich das Teilchen auf der Halbachse rechts vom Ursprung befindet. Das Ergebnis der Messung soll $+1$ für $x > 0$ (Messergebnis: „positiv“) und -1 für $x \leq 0$ (Messergebnis: „negativ“) lauten. Wie lautet der entsprechende hermitesche Operator $\hat{A}$?
Hinweis: Benutzen Sie die Spektraldarstellung von $\hat{A}$ im Ortsraum, $\hat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, a(x)|x\rangle\langle x|$ mit den Eigenwerten $a(x)$.

(b) Wie lautet die Wellenfunktion $\tilde{\varphi}(x) = \langle x|\tilde{\varphi}\rangle$ nach der Messung an, falls -1 gemessen wurde?

Hinweis: Der Projektionsoperator, der auf den Eigenraum mit Eigenwert -1 projiziert ist gegeben durch $\hat{P}_- = \int_{\infty}^{0} dx\, |x\rangle\langle x|$.

(c) Wie lautet die Impulsraum-Wellenfunktion $\varphi(p)$ vor der Messung?

(d) Anstelle von (a) wird eine Messung durchgeführt, die überprüft, ob der Impuls des Teilchens positiv ist. Wie lautet nun der entsprechende Operator $\hat{B}$, der den Messwert $+1$ liefert für $p > 0$ und den Messwert -1 für $p \leq 0$? Geben Sie außerdem die durch die Messung mit Messwert -1 kollabierte Wellenfunktion $\tilde{\varphi}(p)$ an.

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2020!