Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

DR. L. JANSSEN

11. Übung (Besprechung: 13./15.01.20)

1. Harmonischer Oszillator

Die Hamilton-Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \tag{1}$$

mit

$$\hat{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i\alpha\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{2}$$

und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Die charakteristische Oszillatorlänge ist $\alpha = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Die stationären Zustände sind gegeben durch $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ und den Eigenenergien $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

- (a) Berechnen Sie (darstellungsunabhängig!) die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{p}$, $\hat{x}$, $\hat{p}^2$ und $\hat{x}^2$ im Zustand $|n\rangle$. Bestimmen Sie weiterhin das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$ bezüglich dieses Zustandes. Für welches n wird das Unschärfeprodukt minimal?
- (b) Betrachten Sie den Zustand $|\Psi(t)\rangle$, der zur Zeit $t = 0$ durch $|\Psi(0)\rangle = c(2|0\rangle + |1\rangle)$ gegeben sei. Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Normierungskonstante c , sodass $\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = 1$. Wie lauten die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle(t)$ und $\langle\hat{p}\rangle(t)$ als Funktion der Zeit? Zeigen Sie, dass diese den Ehrenfest-Relationen genügen (6. Übung, Aufgabe 3).
- (c) Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi(x, t) = \langle x|\Psi(t)\rangle$ in der Ortsraumdarstellung? Skizzieren Sie qualitativ die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit $t = T/2$ der halben Oszillationsperiode T .

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Grundzustandswellenfunktion $\langle x|0\rangle$ in der Ortsraumdarstellung und verwenden Sie $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$, um daraus $\langle x|1\rangle$ zu bestimmen.

2. Baker-Campbell-Hausdorff Formel

Gegeben seien zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Zeigen Sie, dass

$$e^{-\hat{B}} \hat{A} e^{\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{A}, \hat{B}]_n, \tag{3}$$

wobei der n -fache Kommutator $[\cdot, \cdot]_n$ induktiv definiert ist durch $[\hat{A}, \hat{B}]_0 := \hat{A}$ und $[\hat{A}, \hat{B}]_n := [[\hat{A}, \hat{B}]_{n-1}, \hat{B}]$ für $n \geq 1$.

Anleitung: Betrachten Sie die Funktion $\hat{F}(s) = e^{-s\hat{B}} \hat{A} e^{s\hat{B}}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für die Ableitungen gilt: $\frac{d^n \hat{F}(s)}{ds^n} = e^{-s\hat{B}} [\hat{A}, \hat{B}]_n e^{s\hat{B}}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Mit einer Taylorentwicklung von $\hat{F}(s)$ um $s = 0$ folgt dann für $s = 1$ die zu zeigende Formel.

3. Heisenberg-Bild

Ein Operator $\hat{A}$ im Heisenberg-Bild ist allgemein gegeben durch

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \hat{A} e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \quad (4)$$

mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$. Betrachten Sie den harmonischen Oszillator $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ und berechnen Sie den Auf- und Absteigeoperator im Heisenberg-Bild, $\hat{a}_H^\dagger(t)$ und $\hat{a}_H(t)$. Berechnen Sie ebenfalls den Impuls- und Ortsoperator des harmonischen Oszillators im Heisenberg-Bild.

Hinweis: Verwenden Sie Gleichung (3).

4. Translationen im Ortsraum

Der unitäre Operator, der zur Translation $x \mapsto x + x_0$ im Ortsraum gehört, lautet

$$\hat{T}_{x_0} = e^{-ix_0\hat{p}/\hbar}. \quad (5)$$

Betrachten Sie eine Operatorfunktion $f(\hat{x})$ und zeigen Sie explizit, dass die transformierte Operatorfunktion $\tilde{f}(\hat{x}) := \hat{T}_{x_0}^\dagger f(\hat{x}) \hat{T}_{x_0}$ gegeben ist durch $\tilde{f}(\hat{x}) = f(\hat{x} + x_0)$.

Hinweis: Verwenden Sie Gleichung (3) und die Relation $[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar f'(\hat{x})$ (4. Übung, Aufgabe 2).