Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

DR. L. JANSSEN **12. Übung (Besprechung: 20./22.01.20)**

---

1. Wellenmechanik versus Bohr-Sommerfeld-Quantisierung

(a) Betrachten Sie die Grundzustandswellenfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators im Ortsraum,

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi\alpha^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \tag{1}$$

mit der charakteristischen Oszillatorlänge $\alpha = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ und der Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Berechnen Sie die quantenmechanischen Erwartungswerte $\langle \hat{x}^2 \rangle_{\psi_0}$ und $\langle \hat{x}^4 \rangle_{\psi_0}$.
Hinweise: $\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^2 e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^4 e^{-y^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

(b) Betrachten Sie nun die dazugehörige klassische Hamilton-Funktion,

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \tag{2}$$

und berechnen Sie im Rahmen der älteren Quantentheorie nach Bohr und Sommerfeld die entsprechenden Erwartungswerte $\langle x^2 \rangle_{\text{B-S}}$ und $\langle x^4 \rangle_{\text{B-S}}$. Nehmen Sie hierzu eine klassische Bahnkurve $x(t)$ zur Energie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ an und berechnen Sie die zeitlichen Mittelwerte $\langle x^m \rangle_{\text{B-S}} = \frac{1}{T}\int_0^T dt x^m(t)$ mit $m = 2, 4$ und der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Liefert die Bohr-Sommerfeld-Theorie die richtigen Ergebnisse?
Hinweise: $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = \pi$ und $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^4\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

2. Harmonischer Oszillator und Messprozess

Der Zustand eines quantenmechanischen Teilchens in einem Oszillator-Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ mit Masse m und Kreisfrequenz ω sei durch die normierte Wellenfunktion

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{\pi\alpha^2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{10}} \left[2\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)^2 - 3\right] e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \tag{3}$$

beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Messung der Energie im n-ten Energieniveau anzutreffen. Wie groß ist der Erwartungswert der Energie?
Hinweis: Zerlegen Sie $\varphi(x)$ in Energieeigenfunktionen $\psi_n(x)$. Schreiben Sie dazu insbesondere einige der untersten Energieeigenfunktionen explizit an.

(b) Bei einer Messung der Energie werde nun der Wert $E = \frac{3\hbar\omega}{2}$ gefunden. Wie lautet die kollabierte Wellenfunktion $\tilde{\varphi}(x)$ direkt nach der Messung?

(c) Im direkten Anschluss an die Messung in (c) werde der Ort des Teilchens gemessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen außerhalb des klassisch erlaubten Bereiches gefunden wird.
Hinweis: $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} y^2 e^{-y^2} \approx 0.0558 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3. Kohärente Zustände

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

wobei $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ die Auf- und Absteigeoperatoren mit $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ bezeichnen.

(a) Beweisen Sie, dass $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

(b) Betrachten Sie den Zustand $|\phi\rangle = e^{\phi\,\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ mit $\phi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $|\phi\rangle$ ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators ist, d.h. $\hat{a}|\phi\rangle = \lambda_\phi|\phi\rangle$, und bestimmen Sie den Eigenwert λ_ϕ.
Hinweis: Nutzen Sie die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und die Relation in (a).