Quantentheorie für das Lehramt WS 19/20

Dr. L. Janssen **14. Übung (Besprechung: 03./05.02.20)**

---

1. Wasserstoffatom

Es seien $|n\ell m\rangle$ die normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators des Wasserstoff-Atoms mit der Hauptquantenzahl $n = 1, 2, \ldots,$ der Nebenquantenzahl $\ell = 0, 1, \ldots, n-1$ und der magnetischen Quantenzahl $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$. Ein Wasserstoff-Atom sei durch den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{4}{5}|100\rangle + \frac{1}{5}|211\rangle - \frac{2}{5}|210\rangle + \frac{2i}{5}|311\rangle \tag{1}$$

beschrieben.

(a) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\Psi\rangle$ normiert ist.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle \hat{H} \rangle_\psi$.

(c) Die z-Komponente des Bahndrehimpulses $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ werde gemessen. Welches sind die möglichen Messwerte und wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, diese Messwerte zu finden?

(d) Bei einer Messung von $\hat{L}_z$ werde der Messwert $+\hbar$ gefunden. Wie lautet die normierte Wellenfunktion $|\tilde{\psi}\rangle$ direkt nach der Messung?

(e) Bestimmen Sie mithilfe der allgemeinen Unschärferelation eine untere Schranke für das Produkt $\Delta L_x \Delta L_y$ der Schwankungen von $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ im Zustand $|\tilde{\psi}\rangle$ nach obiger Messung.
Hinweis: $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|$ für hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

(f) Bestimmen Sie nun explizit $\Delta L_x \Delta L_y$ im Zustand $|\tilde{\psi}\rangle$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis in (e).
Hinweis: Schreiben Sie $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ mithilfe von Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Benutzen Sie die in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften von $\hat{L}_\pm$ und die Relation $\hat{L}_\pm \hat{L}_\mp = \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar \hat{L}_z$.

2. Geladenes Teilchen im Magnetfeld

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q und Masse m im Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ in drei Dimensionen, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c}\hat{\mathbf{A}}\right)^2, \tag{2}$$

mit dem Vektorpotential in Landau-Eichung $\hat{\mathbf{A}} = (0, B\hat{x}, 0)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator in Landau-Eichung gleichzeitig mit der y- und der z-Komponente des Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ diagonalisiert werden kann.

(b) Betrachten Sie nun gemeinsame Eigenzustände $|nk_yk_z\rangle$ von $\hat{H}$, $\hat{p}_y$, und $\hat{p}_z$ mit den Eigenwertgleichungen

$$\hat{H}|nk_yk_z\rangle = E_n|nk_yk_z\rangle, \quad \hat{p}_y|nk_yk_z\rangle = \hbar k_y|nk_yk_z\rangle, \quad \hat{p}_z|nk_yk_z\rangle = \hbar k_z|nk_yk_z\rangle, \tag{3}$$

charakterisiert durch die Quantenzahlen n, k_y, und k_z. Zeigen Sie, dass die Eigenwertgleichung von $\hat{H}$ als Schrödinger-Gleichung für ein eindimensionales Teilchen im Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_\mathrm{c}^2\left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega_\mathrm{c}}\right)^2 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \tag{4}$$

mit der Zyklotronfrequenz $\omega_\mathrm{c} = \frac{qB}{mc}$ geschrieben werden kann.

(c) Wie lauten die möglichen Energieeigenwerte E_n? Bestimmen Sie außerdem die Entartungsgrade der jeweiligen Energieeigenwerte.
Hinweis: Verwenden Sie die bekannten Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators.