Theoretische Mechanik für das Lehramt Sommer 25

DR. L. JANSSEN **2. Übung (24.04./02.05.25)**

---

1. Ebene Spiralbewegung

Die Bahnkurve einer Punktmasse sei in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) gegeben durch

$$r(t) = r_0 \mathrm{e}^{kt}, \qquad \varphi(t) = \omega t, \tag{1}$$

wobei $r_0 > 0$, k und ω Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie

- die radialen und azimutalen Komponenten $v_r = \vec{v} \cdot \vec{e}_r$ und $v_\varphi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi$ der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$,
- die radialen und azimutalen Komponenten $a_r = \vec{a} \cdot \vec{e}_r$ und $a_\varphi = \vec{a} \cdot \vec{e}_\varphi$ der Beschleunigung $\vec{a}(t)$,
- die Beträge $v(t) = |\vec{v}(t)|$ und $a(t) = |\vec{a}(t)|$

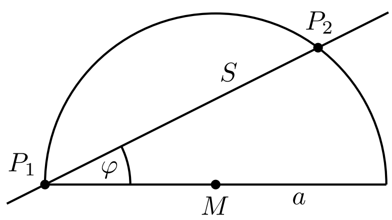
und berechnen Sie daraus die Tangentialbeschleunigung $a_t = \vec{a} \cdot \vec{t}$ und die Normalbeschleunigung (= Zentripetalbeschleunigung) $a_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$.

Hinweis: Dabei brauchen Sie $\vec{t}$ und $\vec{n}$ nicht zu bestimmen.

(b) Diskutieren Sie die Spezialfälle (i) $k = 0$ bzw. (ii) $\omega = 0$.

2. Bewegung einer Punktmasse auf einer sich drehenden Stange

Eine Stange S drehe sich um einen Punkt P_1 in einer Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = k\mathrm{e}^{\sin\varphi}$ für $0 \leq \varphi < \pi/2$, wobei $k > 0$ eine Konstante ist. Zur Zeit $t = 0$ sei $\varphi = 0$. Die Stange schneide einen festen Halbkreis mit dem Radius a in den Punkten P_1 und P_2 (siehe Abbildung).



(a) Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ der Stange.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einer Punktmasse im Punkt P_2 in Richtung der Stange als Funktion von φ.

Hinweis: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten (r, φ) um P_1.

(c) Bestimmen Sie die Beträge von Geschwindigkeit und Beschleunigung, mit der sich die Punktmasse in P_2 bezüglich des Kreismittelpunktes M bewegt.

Hinweis: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ um M oder natürliche Koordinaten.

3. Helixbewegung

Eine Punktmasse bewege sich für $t > 0$ entlang der Bahnkurve (Schraubenlinie)

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{e}_x + R\sin(\omega t)\vec{e}_y + Vt\vec{e}_z \tag{2}$$

mit Konstanten R, ω und V.

(a) Geben Sie die Bahnkurve als Funktion der Bogenlänge s an.

(b) Bestimmen Sie die Koordinateneinheitsvektoren $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$ und $\vec{b}(s)$ in natürlichen Koordinaten.

(c) Bestimmen Sie den Krümmungsradius $\rho(s) = 1/\left|\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right|$ und diskutieren Sie den Unterschied zur ebenen Kreisbewegung ($V \to 0$).

(d) Bestimmen Sie Tangentialbeschleunigung $a_t = \ddot{s}$ und Normalbeschleunigung (= Zentripetalbeschleunigung) $a_n = \dot{s}^2/\rho(s)$ der Punktmasse.