Theoretische Mechanik für das Lehramt **Sommer 25**

Dr. L. Janssen **5. Übung (22./23.05.25)**

---

1. Bewegung unter dem Einfluss Newtonscher Reibung

Ein Körper der Masse m bewege sich im Schwerefeld der Erde unter dem Einfluss Newtonscher Reibung $\vec{F}_{\mathrm{R}} = -\alpha|\dot{\vec{r}}|\dot{\vec{r}}$ mit Reibungskonstante $\alpha > 0$. Einflüsse der Erdbewegung sowie die Ortsabhängigkeit der Gravitation seien vernachlässigbar.

(a) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf.

(b) Beschränken Sie sich auf eine vertikale Bewegung in z-Richtung und betrachten Sie den Fall, dass der Körper zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $\dot{z}(t = 0) = 0$ zu fallen beginne. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit $\dot{z}(t)$.

(c) Berechnen Sie für die Anfangsbedingung $z(t = 0) = h$ den Fallweg $z(t)$.

(d) Welche Näherungen gelten für $\dot{z}(t)$ und $z(t)$ im Grenzfall kleiner Zeiten $t \ll \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$?

Hinweise: $\int \frac{\mathrm{d}u}{c^2-u^2} = \frac{1}{c}\,\mathrm{artanh}\,\frac{u}{c}$; $\int \mathrm{d}u \tanh(cu) = \frac{1}{c}\ln|\cosh(cu)|$; $\sinh u = u + \frac{u^3}{3!} + \mathcal{O}(u^5)$; $\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \mathcal{O}(u^6)$; $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^3)$. (Warum?)

2. Resonanzkatastrophe

Ein Oszillator mit der Eigenfrequenz ω besitze keine Dämpfung und werde mit einer äußeren harmonischen Kraft $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ *derselben* Frequenz ω erregt. Berechnen Sie die Auslenkung des Oszillators als Funktion der Zeit und interpretieren Sie das Ergebnis.

3. Gedämpfter Oszillator mit konstanter äußerer Kraft

Ein linearer, schwach gedämpfter harmonischer Oszillator mit konstanter Masse m, Federkonstante k und Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(x, \dot{x}, t) = -\alpha\dot{x}$ ruhe in seiner Gleichgewichtslage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde eine konstante äußere Kraft F_0 eingeschaltet,

$$F(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0, \\ F_0, & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Geben Sie die Bewegungsgleichung für $t \geq 0$ an und finden Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung.

(b) Berechnen Sie die Auslenkung $x(t)$ unter Berücksichtigung der angegebenen Anfangsbedingungen.