

Theoretische Mechanik für das Lehramt

Sommer 25

DR. L. JANSSEN

6. Übung (30.05.25)

1. Arbeit eines Kraftfeldes

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = f_0 \left[\left(\frac{3}{\alpha^2} x^2 + \frac{2}{\alpha} y \right) \vec{e}_x - \frac{9}{\alpha^2} yz \vec{e}_y + \frac{8}{\alpha^3} xz^2 \vec{e}_z \right] \quad (1)$$

mit den Konstanten $\alpha, f_0 = \text{konst.}$

- (a) Berechnen Sie die Arbeit, die die Kraft an einer Punktmasse leistet, wenn sich diese auf einer Geraden vom Ursprung des Koordinatensystem $\vec{r}_0 = 0$ zum Punkt $\vec{r}_1 = \alpha(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ bewegt.
- (b) Die Punktmasse bewege sich jetzt auf einem Kreis mit dem Radius α in der xy -Ebene um den Koordinatenursprung herum. Welche Arbeit muss das Kraftfeld bei einem vollständigen Umlauf leisten?

2. Konservatives Kraftfeld

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = a(4x - y)\vec{e}_x - b(x - 3y)\vec{e}_y \quad (2)$$

mit den Konstanten $a, b = \text{konst.}$

- (a) Prüfen Sie, ob $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist.
- (b) Unter welcher Bedingung an a und b besitzt die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ ein Potential? Bestimmen Sie unter Annahme dieser Bedingung das zugehörige Potential $V(\vec{r})$.

3. Energie des harmonischen Oszillators

Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den freien eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Eigenfrequenz ω_0 mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes. Die Anfangsbedingungen seien $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$.

Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(x/a)$.

4. Eindimensionale Bewegung

Ein Teilchen bewege sich entlang der x -Achse unter der Wirkung der Kraft $F(x) = -\alpha x + \beta x^3$ mit den positiven Konstanten $\alpha, \beta = \text{konst.} > 0$. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss das Teilchen bei $x = 0$ starten, damit es nicht wieder zurückkehrt?

Hinweis: Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz und diskutieren Sie den Potentialverlauf.