

### 1. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Eine Teilchen der Masse  $m$  bewege sich unter dem Einfluss des Kraftfeldes  $\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha\vec{r}$  mit  $\alpha = \text{konst.} > 0$ .

- Prüfen Sie, ob mechanische Gesamtenergie  $E$  und Drehimpuls  $\vec{L}$  Erhaltungsgrößen sind.
- Welche Aussagen über die Bahnkurve können aus (a) gewonnen werden?
- Geben Sie die kinetische und potentielle Energie des Teilchens sowie den Betrag des Drehimpulses in (geeignet gewählten) Kugelkoordinaten an.
- Diskutieren Sie qualitativ die Bewegung des Teilchens in Abhängigkeit von seiner Energie  $E$ . Skizzieren Sie dazu das effektive Potential  $V_{\text{eff}}$  als Funktion von  $r$ . Nehmen Sie an, dass der Drehimpuls  $L$  aus den Anfangsbedingungen bekannt sei. Wie groß muss die Energie  $E$  sein, damit sich das Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt?

### 2. Bewegung im eindimensionalen Potential

Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich im Potential

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + ax^2 + a^2x^4} \quad (1)$$

mit  $a, V_0 = \text{konst.}$  und  $a > 0$ .

- Welche Bewegungstypen treten in Abhängigkeit der Energie  $E$  und dem Vorzeichen von  $V_0$  auf?
- Berechnen Sie für den Fall des stabilen Gleichgewichts die Frequenz kleiner Schwingungen um die Ruhelage.

*Hinweis:* Entwickeln Sie das Potential um die Gleichgewichtslage in eine Taylor-Reihe.

### 3. Bewegung im Zentralpotential

Eine Punktmasse bewege sich unter dem Einfluss einer konservativen Zentralkraft auf der Bahn  $r(\varphi) = ce^{-\varphi/\gamma}$  mit  $c, \gamma = \text{konst.}$

- Gibt es Erhaltungsgrößen für dieses Problem? Wenn ja, formulieren Sie die zugehörigen Erhaltungssätze in Kugelkoordinaten.
- Bestimmen Sie das Potential, in dem sich die Punktmasse bewegt.
- Wie lautet die zugehörige Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$ ?
- Bestimmen Sie die Bahnkurve, d.h.  $\varphi(t)$  und  $r(t)$ . Es soll die Anfangsbedingung  $\varphi(t=0) = 0$  gelten.
- Diskutieren Sie die Bewegung in Abhängigkeit von  $\gamma < 0$  bzw.  $\gamma > 0$ . Was groß muss  $\gamma$  sein, damit das Teilchen nach einer endlichen Zeit  $t = t_0$  ins Zentrum „stürzt“?