Theoretische Mechanik für das Lehramt Sommer 25

Dr. L. Janssen

8. Übung (19./20.06.25)

---

1. Energie und Drehimpuls im Keplerproblem

Eine Massepunkt der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Beschränken Sie sich auf den Fall gebundener Bewegungen, und untersuchen Sie die Abhängigkeit der Teilchenbahn von den Werten für Drehimpuls und Gesamtenergie des Massepunktes.

(a) Wie ändern sich große Halbachse, kleine Halbachse und Exzentrizität der Ellipsenbahnen, wenn bei konstant gehaltener Gesamtenergie der Drehimpuls variiert wird? Welche Drehimpulswerte sind zulässig?

(b) Wie ändern sich die Ellipsenbahnen, wenn bei konstantem Drehimpuls die Gesamtenergie variiert wird? Welcher Wertebereich für die Gesamtenergie ist bei dieser Betrachtung zulässig?

2. Bewegung eines Kometen

Ein Komet der Masse m bewege sich auf einer parabolischen Bahn im Gravitationsfeld der ruhenden Sonne ($m \ll M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$). Seine Bahnebene falle mit der Bahnebene der Erde zusammen. Der nächste Abstand zur Sonne (das Perihel) betrage ein Drittel der mittleren Entfernung Erde–Sonne ($R_\mathrm{E} = 1{,}49 \cdot 10^{8}\,\mathrm{km}$).

Wie lange bewegt sich der Komet innerhalb der Erdbahn? Die Störungen der Kometenbahn durch die Planeten sollen dabei vernachlässigt und die Erdbahn durch eine Kreisbahn angenähert werden.

Hinweis: Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$.

3. Gekoppelte harmonische Oszillatoren

In einem System aus zwei Massepunkten, die sich an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ befinden, wirke auf den Massepunkt 1 die Kraft

$$\vec{F}_1 = -a\vec{r}_1 - b\vec{r}_2 \tag{2}$$

und auf den Massepunkt 2 die Kraft

$$\vec{F}_2 = -c\vec{r}_1 - d\vec{r}_2. \tag{3}$$

(a) Zerlegen Sie die Kräfte in innere und äußere Kräfte.

(b) Finden Sie für den Fall $b = c$ ein Potential in der Form

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1,2} V_i(\vec{r}_i) + V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{4}$$