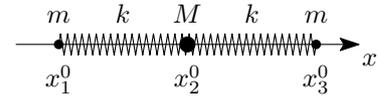


1. Longitudinale Schwingungen eines linearen dreiatomigen Moleküls

Betrachten Sie (als Modell für die longitudinalen Schwingungen eines symmetrischen, dreiatomigen Moleküls) drei Punktmassen $m_1 = m_3 = m$ und $m_2 = M > m$, die durch zwei gleiche Federn (Federkonstante k) miteinander gekoppelt sind (siehe Abbildung).



Nehmen Sie an, dass die Massen sich nur eindimensional entlang der x -Achse bewegen. Die Gleichgewichtslagen der drei Atome seien x_1^0 , x_2^0 und x_3^0 , die Auslenkung aus dem Gleichgewicht seien x_1 , x_2 und x_3 .

- Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die drei Massen an, wobei zur Lagebeschreibung die Auslenkungen x_i (mit $i = 1, 2, 3$) verwendet werden sollen.
- Wie lauten die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des Systems? Interpretieren Sie die Lösungen.
- Wie lautet die allgemeine Lösung für das System?

2. Trägheitstensor eines gleichschenkligen dreiatomigen Moleküls

Gegeben sei ein dreiatomiges Molekül, vereinfacht dargestellt durch drei Punktmassen. Die Punktmasse m_1 befinde sich am Ort $\vec{r}_1 = -\frac{c}{2}\vec{e}_x$, m_2 am Ort $\vec{r}_2 = \frac{c}{2}\vec{e}_x$ und m_3 am Ort $\vec{r}_3 = b\vec{e}_y$. Die Punktmassen bilden somit ein gleichschenkliges Dreieck.

- Berechnen Sie alle Komponenten $J_{\alpha\beta}$ des Trägheitstensors für dieses Dreikörperproblem bezüglich des Ursprungs des Koordinatensystems.
- Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes (Massenmittelpunkt) des Moleküls.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Steiner.

3. Bewegung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene

Gegeben sei ein Zylinder mit Radius R und Länge L . Mit steigendem Abstand r_{\perp} zur Symmetrieachse nehme die Massendichte innerhalb des Zylinders quadratisch zu, $\rho(\vec{r}) = \gamma r_{\perp}^2$ mit $\gamma = \text{konst.}$

- (a) Bestimmen Sie die Gesamtmasse M des Zylinders.
- (b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_{III} des Zylinders bezüglich seiner Rotation um die Symmetrieachse. Geben Sie J_{III} als Funktion von M und R an.
- (c) Der Zylinder rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft schlupffrei eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel α hinab. Wie groß ist die Rotationsgeschwindigkeit ω des Zylinders, nachdem er, ausgehend von der Ruhelage, eine Strecke ℓ_0 auf der schiefen Ebene zurückgelegt hat?

Hinweis: Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz.