Theoretische Mechanik für das Lehramt Sommer 25

Dr. L. Janssen

11. Übung (10./11.07.25)

1. Hauptträgheitsmomente eines Würfels

Für einen homogenen Würfel mit Kantenlänge a and Masse M, der sich im ersten Quadranten des Koordinatensystems befindet, sodass ein Eckpunkt des Würfels sich im Koordinatenursprung befindet, lautet der Trägheitstensor

$$\hat{J} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente sowie die Lage der drei Hauptachsen.

Hinweis: Stellen Sie die Eigenwertgleichung auf und versuchen Sie, eine Lösung davon zu erraten. Alternativ können Sie einen Eigenvektor erraten und den dazugehörigen Eigenwert berechnen.

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Steinerschen Satzes den Trägheitstensor $\hat{J}^{(\mathrm{S})}$ für eine Drehbewegung um den Schwerpunkt des Würfels.

2. Drehbewegung einer Raumstation

Eine geostationäre Raumstation soll als Hohlkugelschale mit einer Masse von $m = 6000\,\mathrm{kg}$ aufgefasst werden. Der Innenradius betrage dabei $R_\mathrm{i} = 5\,\mathrm{m}$, der Außenradius $R_\mathrm{a} = 6\,\mathrm{m}$. Um die Orientierung der Raumstation zu ändern, beschleunigt man ein Schwungrad der Masse $m_\mathrm{S} = 10\,\mathrm{kg}$ sehr schnell von 0 auf 1000 Umdrehungen pro Minute. Dabei sei das Schwungrad, welches als homogene zylindrische Scheibe mit Radius $R_\mathrm{S} = 10\,\mathrm{cm}$ und Trägheitsmoment $J_\mathrm{S} = \frac{1}{2} m_\mathrm{S} R_\mathrm{S}^2$ angenommen werde, im Zentrum der Station positioniert.

Wie lange dauert es, bis sich die Raumstation um $10°$ gedreht hat?

Hinweis: Nutzen Sie den Drehimpulserhaltungssatz.

3. Erhaltungssätze des kräftefreien Kreisels

Betrachten Sie einen unsymmetrischen kräftefreien Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten J_I, J_II und J_III.

(a) Zeigen Sie explizit, ausgehend von den Eulerschen Gleichungen, dass der Betrag des Drehimpulses $L = |\vec{L}|$ im körperfesten Bezugssystem erhalten ist. Gilt dies auch für die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}/L$ im körperfesten Bezugssystem?

Hinweis: Multiplizieren Sie jeweils die Eulersche Gleichung für $\dot{\omega}_\eta$, $\eta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$, mit $J_\eta \omega_\eta$ und addieren Sie die so entstehenden drei Gleichungen.

(b) Zeigen Sie explizit, ausgehend von den Eulerschen Gleichungen, dass die Rotationsenergie T_R erhalten ist.

Hinweis: Finden Sie, analog zu (a), einen geschickten Faktor, mit dem Sie jeweils die Eulersche Gleichung für $\dot{\omega}_\eta$, $\eta \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$, multiplizieren müssen, damit durch Summation der drei Gleichungen die Zeitableitung der Rotationsenergie entsteht.