Theoretische Mechanik für Lehramt

Sommer 25

Kontakt:

Lukas Janssen
Institut für Theoretische Physik
BZW/A141
lukas.janssen@tu-dresden.de

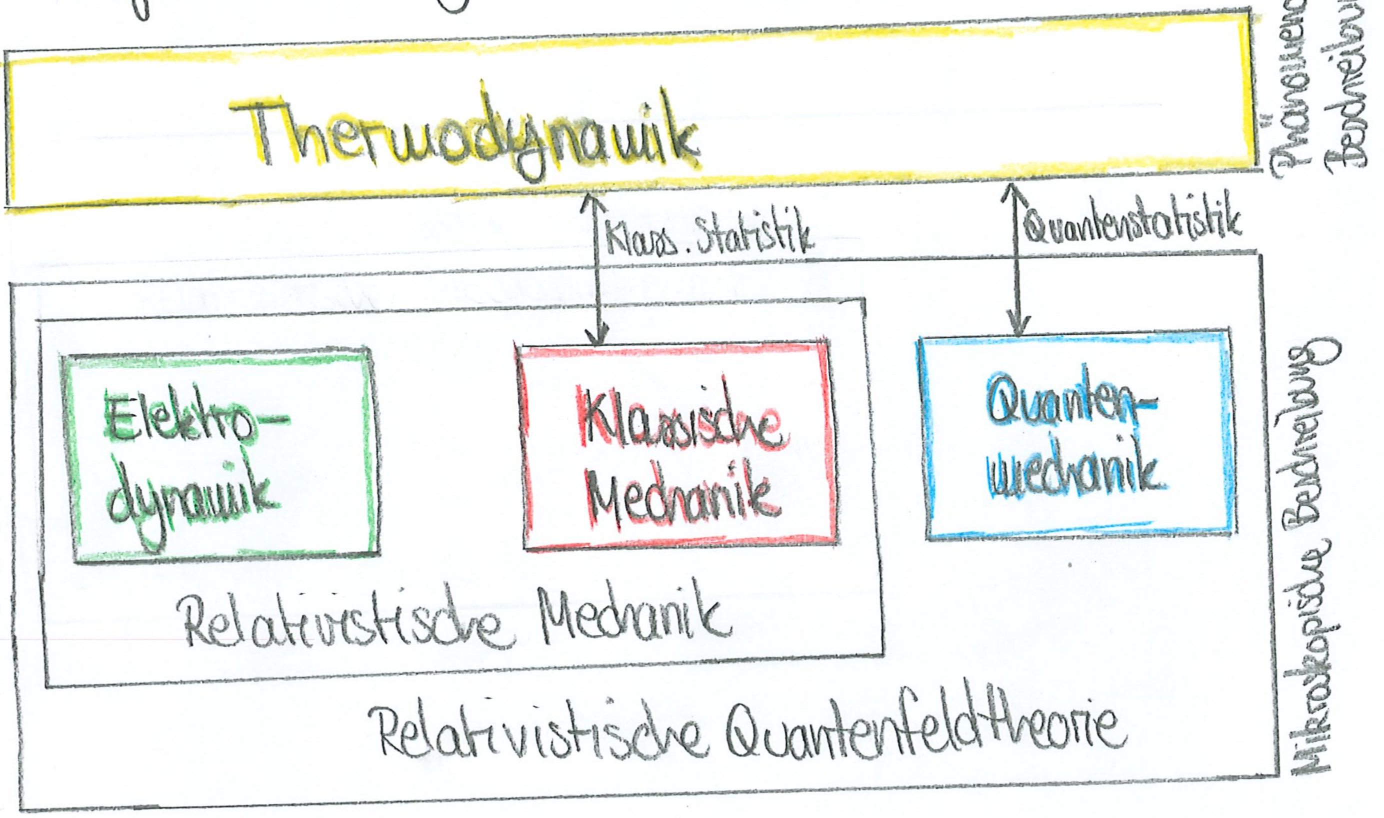
Vorlesungswebseite:

https://tu-dresden.de/physik/qcm/lehre/tm-ss25

Inhalt:

0 Einführung

Teilgebiete der Physik (vereinfacht):



Ziele der Theoretischen Physik:

- Verständnis allgemeiner Gesetzmäßigkeiten
- Quantitative Beschreibung physikalischer Vorgänge

1 Kinematik

1.1 Grundbegriffe

Punktmasse : Körper mit endlicher Masse aber ohne Volumen

Bemerkungen:

- Punktmasse Modell für realen Körper falls Ausdehnung vernachlässigbar (Idealisierung!)
- Punktmasse hat keine Orientierung
- Punktmasse kann sich nicht verformen

Beispiel: Bewegung der Erde im Sonnensystem

Raum: Unveränderlicher, drei-dimensionaler euklidischer Raum $\mathbb{R}^3$, der unbeeinflusst der physikalischen Vorgänge, die sich in ihm abspielen, existiert.

Zeit: Mathematischer Parameter t, welcher die Dauer physikalischer Vorgänge beschreibt, aber unbeeinflusst von diesen stets gleichmäßig fortschreitet.

Bemerkungen:

- Spezielle Relativitätstheorie: Zeit von Relativgeschwindigkeit abhängig (→ Kapitel 7)
- Allgemeine Relativitätstheorie: Massen krümmen Raum

<u>Ortsvektor:</u> Gebundener Vektor, der vom Koordinatenursprung zu einem Punkt zeigt.

<u>Bahnkurve:</u> Kurve der Abbildung $t \mapsto \vec{r}(t)$

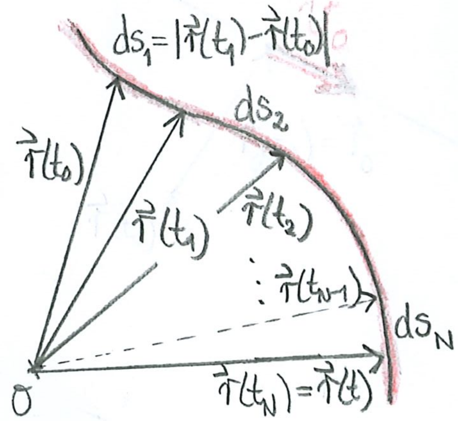
<u>Geschwindigkeit:</u> $$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

<u>Beschleunigung:</u> $$\vec{a}(t) := \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

<u>Bahnebene:</u> Ebene, die durch $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ aufgespannt wird.

<u>Bogenlänge:</u> Länge des seit gegebenen Anfangszeitpunkt t_0 zurückgelegten Weges

$$s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} ds_n$$



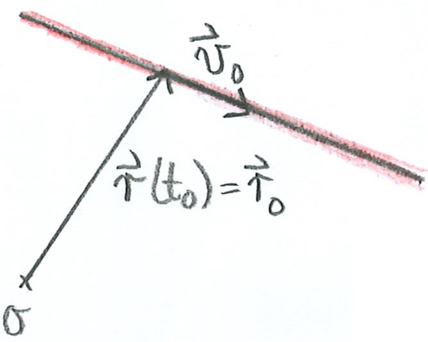
$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} |\vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1})|$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\vec{r}(t_{n-1} + \Delta t) - \vec{r}(t_{n-1})}{\Delta t} \right| \Delta t$$

$$= \int_{t_0}^{t=t_N} \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| dt'$$

$$= \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(t')| \, dt'$$

Beispiel (geradlinig gleichförmige Bewegung):



$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$$

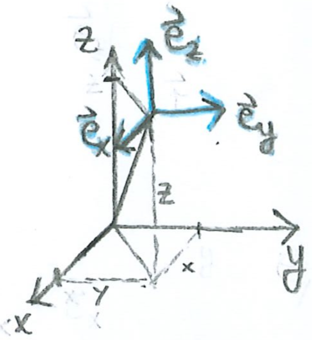
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = 0$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}_0| \, dt' = |\vec{v}_0| \cdot (t - t_0)$$

1.2 Koordinatensysteme

(A) Kartesische Koordinaten



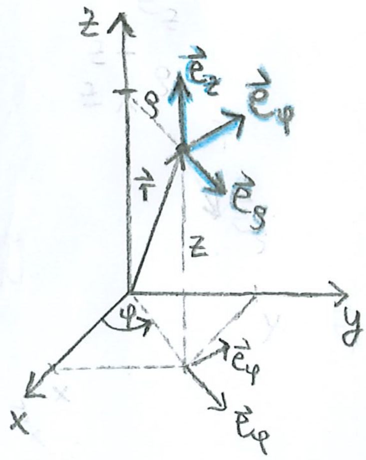
Basisvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ zeitunabhängig und raumfest

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

(B) Zylinderkoordinaten



Basisvektoren:

$$\vec{e}_\varrho(\varphi) = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z$$

ortsabhängig ("krummlinige Koordinaten")

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = \varrho\,\vec{e}_\varrho + z\,\vec{e}_z$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$= \dot{\varrho}\,\vec{e}_\varrho + \varrho\,\underbrace{\frac{d\vec{e}_\varrho}{dt}}_{\frac{\partial \vec{e}_\varrho}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi}} + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

$$= \dot{\varrho}\,\vec{e}_\varrho + \varrho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

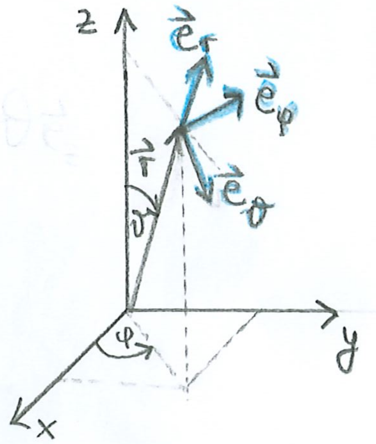
Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\underbrace{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}}_{=\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\underbrace{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}}_{=\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho} + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

(C) Kugelkoordinaten

Basisvektoren:



$$\vec{e}_r(\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi) = \cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\vartheta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r\,\vec{e}_r$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

$$= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{=\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi}$$

$$= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

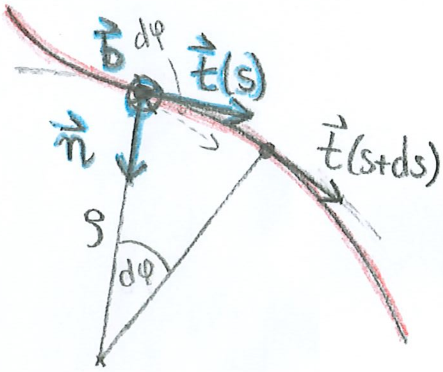
Beschleunigung: $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r$

$$+ (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\vartheta$$

$$+ (r\sin\vartheta\,\ddot{\varphi} + 2\sin\vartheta\,\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$$

Bemerkung: Ebene Polarkoordinaten (r,φ) erhält man aus Zylinderkoordinaten für $z=0$ oder Kugelkoordinaten für $\vartheta = \pi/2$

(D) Natürliche Koordinaten



Tangenteneinheitsvektor : $\vec{t}(s) := \dfrac{d\vec{r}}{ds}$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Normaleneinheitsvektor : $\vec{n}(s) := \dfrac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \rho(s)\,\dfrac{d\vec{t}}{ds}$

wobei $\rho(s) = \dfrac{1}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}$ der Radius des Schmiegekreises ist

NR: $ds = \rho\, d\varphi = \rho|d\vec{t}|$

Binormaleneinheitsvektor: $\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$

Geschwindigkeit : $\vec{v}(t) = \dot{s}\,\vec{t}$

Beschleunigung : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$$= \ddot{s}\,\vec{t} + \dot{s}\,\underbrace{\frac{d\vec{t}}{dt}}_{\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{\varrho}\dot{s}}$$

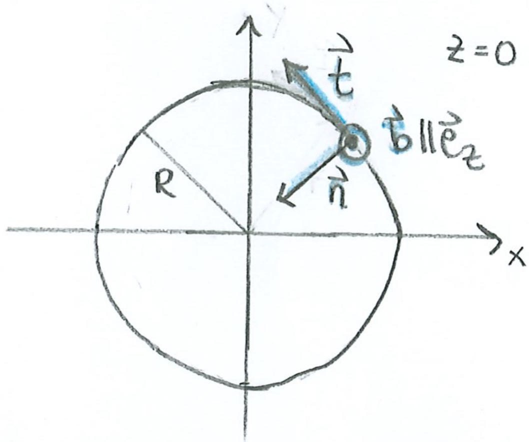
$$= \underbrace{\ddot{s}\,\vec{t}}_{\text{"Tangential-beschleunigung"}} + \underbrace{\frac{\dot{s}^2}{\varrho}\,\vec{n}}_{\text{"Zentripetal-beschleunigung"}}$$

Beispiel (Kreisbewegung):

Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} = \varrho\,\vec{e}_\varrho + z\,\vec{e}_z$$

$$= R\,\vec{e}_\varrho \qquad \text{mit } R = \text{const.}, \; z = 0$$



$$\vec{v} = R\,\omega\,\vec{e}_\varphi \qquad \text{mit } \dot{\varphi} = \omega = \text{const.} > 0 \text{ Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varrho + R\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Bogenlänge :

$$s = \int_0^t |\vec{v}(t')|\,dt'$$

$$= R\omega t$$

Natürliche Koordinaten:

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = -\vec{e}_\rho$$

$$\text{NR: } \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\frac{1}{R\omega} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{=\omega}\frac{1}{R\omega} = -\vec{e}_\rho\frac{1}{R}$$

$$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = -\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\rho = -(-\sin^2\varphi\,\vec{e}_x\times\vec{e}_y + \cos^2\varphi\,\vec{e}_y\times\vec{e}_x)$$
$$= (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Radius Schmiegekreis:

$$\rho = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \frac{1}{\left|-\frac{\vec{e}_\rho}{R}\right|} = R \quad \checkmark$$