

2 Newtonsche Punktmechanik

11

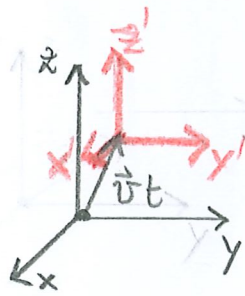
2.1 Newtonsche Axiome

Kraft: Vektorielle Größe $\vec{F}$, welche den Bewegungszustand oder die Gestalt eines Körpers ändert

Bezugssystem: Koordinatensystem in vierdimensionaler Raumzeit, welche durch die drei räumlichen Richtungen und die Zeit aufgespannt wird

Beispiele:

- Laborsystem
- Mitbewegtes Bezugssystem



1. Newtonsches Axiom: Es existieren Bezugssysteme, in denen jeder kräftefreier Körper sich geradlinig gleichförmig bewegt oder ruht. Diese Bezugssysteme heißen Inertialsysteme.

Bemerkung: Newtons ursprüngliche Formulierung nimmt implizit Inertialsystem an:

"Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustandes gezwungen wird"

Träge Masse: Skalare Größe m , welche den Widerstand eines Körpers gegen Bewegungsänderungen beschreibt

Impuls: $\vec{p} := m_t \vec{v}$

2. Newtonsches Axiom: In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses eines Körpers pro Zeiteinheit proportional und parallel zur angreifenden Kraft. In einem kohärenten Einheitensystem gilt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Bemerkungen:

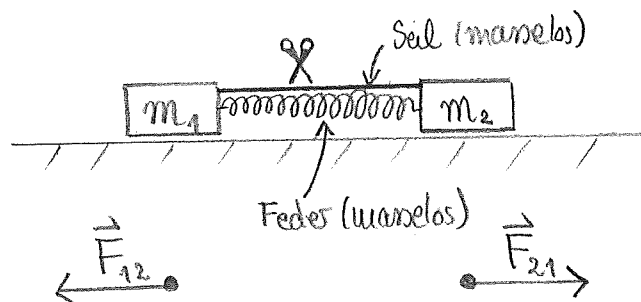
- Falls träge Masse zeitunabhängig ist, gilt: $\vec{F} = m_t \dot{\vec{v}} = m_t \vec{a}$
- Für zeitunabhängige Massen kann $\frac{\vec{F}}{m_t} := \vec{a}$ als Definition von $\frac{\vec{F}}{m_t}$ aufgefasst werden
- Beispiele für zeitabhängige Massen: Rakete, Auto mit Verbrennungsmotor

3. Newtonsches Axiom: Die Kraft $\vec{F}_{12}$, die ein Körper 2 auf einen Körper 1 ausübt, und die Kraft $\vec{F}_{21}$, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, sind entgegengesetzt gerichtet und betragsmäßig gleich:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Bemerkungen:

- 3. Axiom erlaubt Definition der trägen Masse eines Körpers:



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} := \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} \quad \text{Definition}$$

der trägen Masse m_2 in Bezug auf Referenzmasse m_1

- 2. Axiom erlaubt dann Definition der Kraft: $\vec{F} = m_z \vec{a}$ (14)
- 3. Axiom nimmt instantane Kraftwirkung an $\Rightarrow$ nichtrelativistisches Prinzip

Superpositionsprinzip: Wirken auf eine Punktmasse

mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, so addieren sich die Kräfte vektoriell:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

2.2 Kräfte

Kraftfeld: Kraft $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, welche an einem Ort $\vec{r}$ zur Zeit t auf einen Testkörper mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ wirkt

Schwere Masse: Skalare Größe m_s , Maß für Gewichtskraft eines Körpers

Gewichtskraft: $\vec{F}_G = m_s \vec{g}$, wobei $|\vec{g}| = 9,81 \frac{m}{s^2}$ auf der Erdoberfläche

Freier Fall im Schwerfeld:

(15)

$$\vec{F}_G = m_s \vec{g} \Rightarrow m_t \vec{a} = m_s \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \frac{m_s}{m_t} \vec{g}$$

Experimente zeigen, dass $\vec{a}$ nur von $\vec{g}$ abhängt $\Rightarrow m_s \propto m_t$

Schwaches Äquivalenzprinzip: In einem kohärenten Einheitensystem sind träge und schwere Masse gleich: $m_t = m_s$

Gravitationskraft: Kraft, die Punktmasse M auf Punktmasse m ausübt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \gamma \frac{M m}{r^2} \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

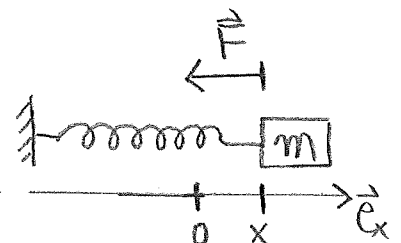
mit Gravitationskonstante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

Lorentzkraft: Kraft auf Ladung q im elektromagnetischen Feld:

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \underbrace{\vec{E}(\vec{r}, t)}_{\text{el. Feld}} + q \vec{v} \times \underbrace{\vec{B}(\vec{r}, t)}_{\text{magn. Flussdichte}}$$

Federkraft (Hookesches Gesetz): Kraft einer um Länge x ausgedehnten Feder mit Federkonstante k :

$$\vec{F}(x) = -k x \vec{e}_x$$

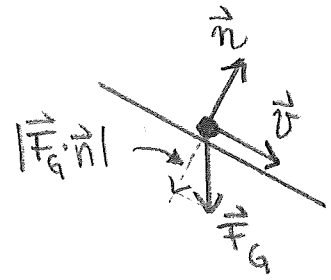


Reibungskräfte: Kräfte, die stets der Geschwindigkeit eines Körpers entgegenzusetzen sind

Gleitreibung: $\vec{F} = -\mu_g |\vec{F}_G \cdot \vec{n}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

↑
Gleitreibungs-
koeffizient

↑
Normalenvektor



Stokessche Reibung: $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ (laminare Strömung)

↑
Reibungskoeffizient, der
von Viskosität der Flüssigkeit
und Form und Größe des Körpers abhängt

Newtonsche Reibung: $\vec{F} = -\beta |\vec{v}| \vec{v}$ (turbulente Strömung)

↑
Reibungskoeffizient, der von Dichte der
Flüssigkeit und Form und Größe des Körpers
abhängt

2.3 Transformation zwischen Bezugssystemen

(17)

Ereignis: Punkt $(t, \vec{r})$ in einem Bezugssystem Σ

Bemerkung: In einem anderen Bezugssystem Σ' hat das selbe Ereignis andere Koordinaten $(\vec{r}', t')$.

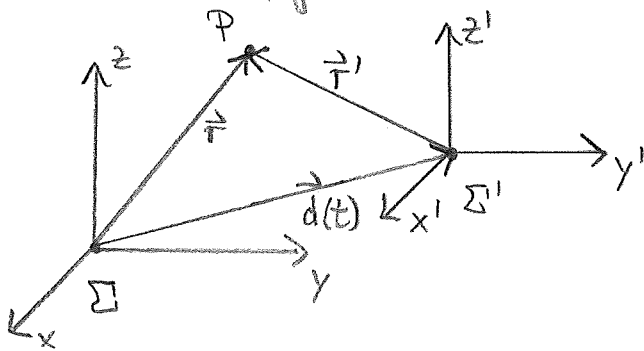
Absolute Zeit: $t' = t - t_0$ mit $t_0 = \text{konst.}$ (können o.B.d.A. $t_0 = 0$ wählen)

Annahmen (Spezielle Galilei-Transformation):

(1) Σ und Σ' seien Inertialsysteme

(2) Σ' gehe aus Σ durch zeitabhängige Translation $\vec{d}(t)$ hervor

$\Rightarrow \Sigma$ und Σ' haben gleiche Basisvektoren $\vec{e}_i$



Folgerung (Punktwasse mit Ortsvektor $\vec{r}$ in Σ und $\vec{r}'$ in Σ'):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}'(t) + \ddot{\vec{d}}(t)$$

$\Rightarrow \ddot{\vec{d}}(t) = 0$, ansonsten würde kräftefreier Körper in Σ in Σ' beschleunigt bewegen [Widerspruch zu (1)]

$$\Rightarrow \vec{d}(t) = \vec{v}t + \vec{d}_0 \text{ mit } \vec{v}, \vec{d}_0 \text{ konstant}$$

Spezielle Galilei-Transformation:

Für die Koordinaten in den Inertialsystemen Σ und Σ' gilt die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t - \vec{d}_0 \\ t' &= t - t_0\end{aligned}$$

Annahmen (allgemeine Galilei-Transformation):

- (1) Σ und Σ' seien Inertialsysteme
- (2) Σ' gehe aus Σ durch zeitabhängige Translation $\vec{d}(t)$ und zeitunabhängige Rotation $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $R^T R = \mathbb{1}$ hervor

Allgemeine Galilei-Transformation:

Für die Koordinaten in den Inertialsystemen Σ und Σ' gilt die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= R \vec{r} - \vec{v}t - \vec{d}_0 \\ t' &= t - t_0\end{aligned}$$

Folgerung:

Newtonsche Gesetze sind forminvariant ("kovariant") unter allgemeinen Galilei-Transformationen

Annahmen (rotierendes Bezugssystem):

(1) Σ sei ein Inertialsystem

(2) Σ' rotiere relativ zu Σ mit Winkelgeschwindigkeit ω um Drehachse $\vec{\omega}$

Ortsvektor in Σ und Σ' : $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i$

Geschwindigkeit in Σ : $\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\dot{x}'_i \vec{e}'_i + x'_i \dot{\vec{e}}'_i)$

Geschwindigkeit in Σ' : $\dot{\vec{r}}' = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \sum_{i=1}^3 x'_i \dot{\vec{e}}'_i$$

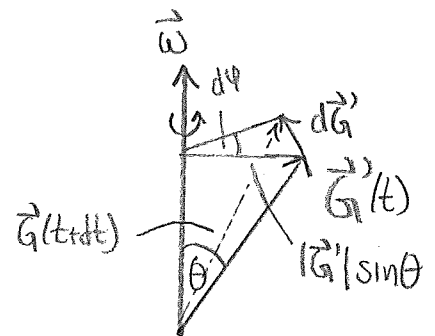
Änderung eines in Σ' zeitunabhängigen Vektors $\vec{G}'$ in Σ :

$$|d\vec{G}'| = |\vec{G}'| \sin\theta d\varphi$$

$$= \omega |\vec{G}'| \sin\theta dt$$

$$d\vec{G}' \perp \vec{G}' \text{ und } d\vec{G}' \perp \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow d\vec{G}' = \vec{\omega} \times \vec{G}' dt$$



Transformation der Geschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \sum_{i=1}^3 x'_i (\vec{\omega} \times \vec{e}'_i) = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Transformation der Zeitableitung (rotierendes Bezugssystem):

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\cdot)}_{\text{Ableitung in } \Sigma} = \underbrace{\frac{d}{dt}(\cdot)'}_{\text{Ableitung in } \Sigma'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\cdot)}_{\text{Rotationsbeitrag}}$$

Transformation der Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')' + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - 2 \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

Bewegungsgleichung (rotierendes Bezugssystem):

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - \underbrace{2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\substack{=: \vec{F}_c \\ \text{"Coriolis-Kraft"}}} - \underbrace{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\substack{=: \vec{F}_z \\ \text{"Zentrifugalkraft"}}} - \underbrace{m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\substack{\text{nur bei beschleunigter} \\ \text{Rotation}}}$$

Bemerkung: $\vec{F}' - \vec{F}$ beschreiben Scheinkräfte, die so beschaffen sind, dass die Bewegung eines kräftefreien Körpers in Σ' so verläuft, dass der Körper sich in Σ geradlinig gleichförmig bewegt

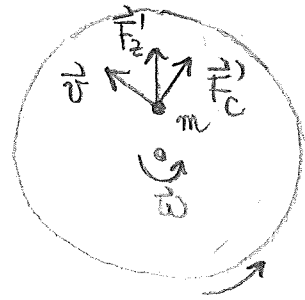
Beispiel (kräftefreier Körper in gleichmäßig rotierendem Bezugssystem):

(21)

$$\vec{F}' = \vec{F}_C' + \vec{F}_Z'$$

$$\text{mit } \vec{F}_C' = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') \perp \dot{\vec{r}}', \vec{\omega}$$

$$\text{und } \vec{F}_Z' = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \perp \vec{\omega}$$

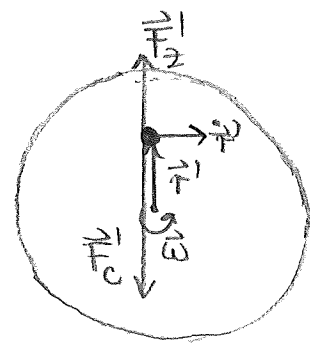


Anwendung: Passatwinde

Beispiel (ruhender Körper in Σ aus Sicht von Σ'):

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times \vec{r}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}'$$

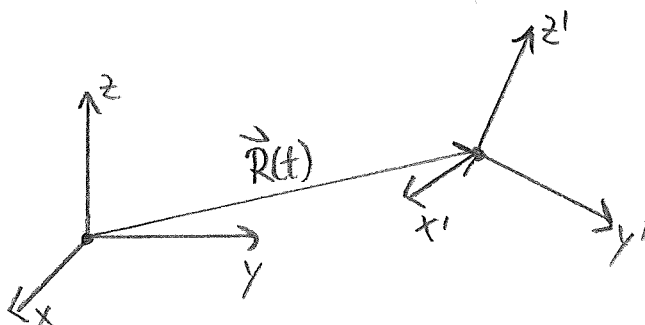
$$\begin{aligned} \vec{F}_C' &= -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') = +2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= -2\vec{F}_Z' \end{aligned}$$



Coriolis-Kraft überkompensiert Zentrifugalkraft, sodass $\vec{r}'(t)$ Kreisbahn beschreibt

Allgemeine Bewegungsgleichung (rotierendes beschleunigtes Bezugssystem):

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$



2.4 Beispielaufgaben

22

Lösungsschema (Bestimmung der Bewegung bei gegebener Kraft):

(1) Aufstellen der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (\text{falls } m \text{ konstant})$$

(2) Lösung des Differentialgleichungssystems

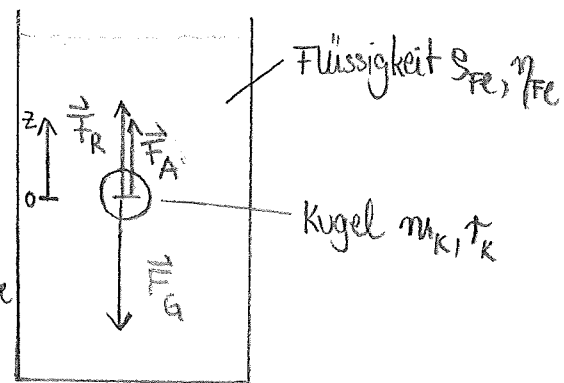
(3) Physikalische Interpretation

(A) Senkrechter Fall in zäher Flüssigkeit

Gewichtskraft: $\vec{F}_G = -m_K g \vec{e}_z$

Auftriebskraft: $\vec{F}_A = +m_{Fe} g \vec{e}_z$, $m_{Fe} = \frac{4\pi}{3} r_K^3 \rho_{Fe}$

Reibungskraft: $\vec{F}_R = -\alpha \vec{v}$, $\alpha = 6\pi \eta_{Fe} r_K$ (laminare Strömung)



(1) Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_R \quad | \cdot \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow m \ddot{z} = -(m_K - m_{Fe}) g - \alpha \dot{z}$$

lineare DGL 2. Ordnung mit Inhomogenität

(2) Lösung:

(i) Substitution $u := \dot{z}$

$$m \dot{u} + \alpha u = -(m_K - m_{Fe}) g$$

(ii) Allgemeine Lösung der homogenen DGL $m \dot{u}_h + \alpha u_h = 0$

$$u_h(t) = C_1 e^{-\frac{\alpha}{m_K} t}, \quad C_1 = \text{konst.}$$

(iii) Spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$u_p(t) = -\frac{m_K - m_{Fe}}{\alpha} g = \text{konst.}$$

(iv) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$= C_1 e^{-\frac{\alpha}{m_K} t} - \frac{m_K - m_{Fe}}{\alpha} g$$

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{m_K}{\alpha} C_1 e^{-\frac{\alpha}{m_K} t} - \frac{m_K - m_{Fe}}{\alpha} g t + C_2$$

(v) Anfangsbedingungen:

$$z(t=0) = 0$$

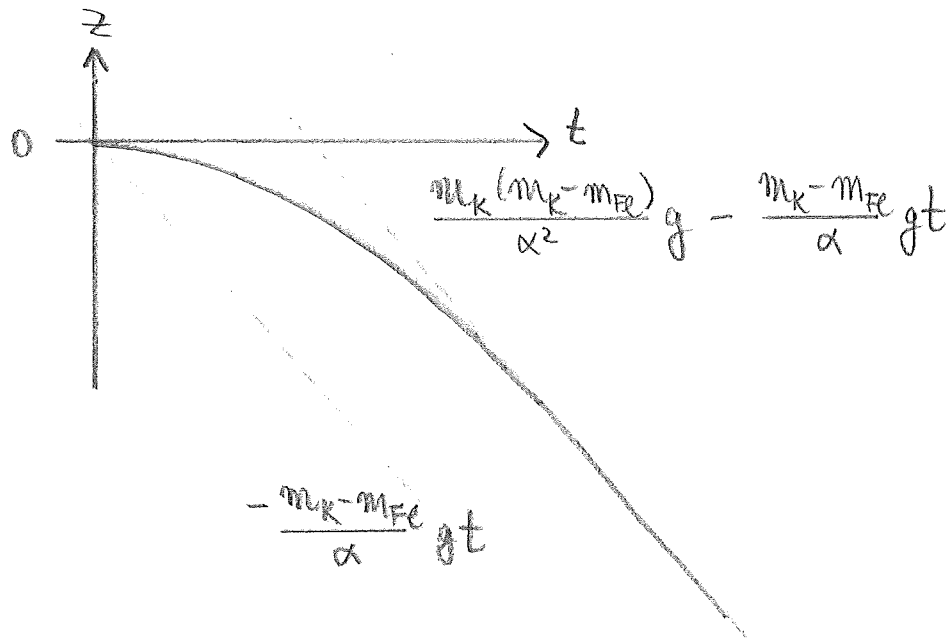
$$\dot{z}(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{m_K(m_K - m_{Fe})}{\alpha^2} g \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m_K} t}\right) - \frac{m_K - m_{Fe}}{\alpha} g t$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{m_K - m_{Fe}}{\alpha} g \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m_K} t}\right)$$

(3) Interpretation:

- Grenzgeschwindigkeit $\dot{z}(t \rightarrow \infty) = -\frac{m_K - m_{Fe}}{\alpha} g$ erlaubt Messung der Viskosität $\eta_{Fe} = \frac{\alpha}{6\pi\tau_K}$
- Charakteristische Zeit: $\frac{m_K}{\alpha}$



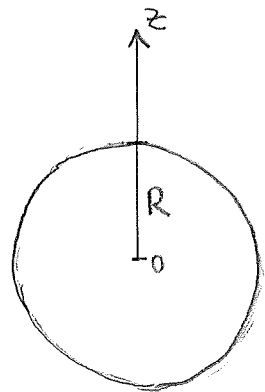
(B) Vertikaler Schuss im Gravitationsfeld

Gravitationskraft: $\vec{F}_G = -\gamma \frac{M m}{z^2} \vec{e}_z$

(1) Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{z} = -\gamma \frac{M m}{z^2}$$

nichtlineare DGL 2. Ordnung der Form $\ddot{x} = f(x)$



(2) Lösung :

(i) Substitution $v(z) := \dot{z}(t(z))$

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt} v(z) = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} v \stackrel{!}{=} -\gamma \frac{M}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dz} = -\gamma \frac{M}{z^2} \frac{1}{v} \quad \text{separierbare DGL 1. Ordnung}$$

(ii) Trennung der Variablen

$$v dv = -\gamma M \frac{dz}{z^2}$$

$$\Rightarrow \int_{v(z_0)}^{v(z)} v' dv' = -\gamma M \int_{z_0}^z \frac{dz'}{z'^2}$$

$$\Rightarrow v(z) = \pm \sqrt{v(z_0)^2 - 2\gamma M \frac{z-z_0}{zz_0}}$$

(iii) Anfangsbedingungen

$$z_0 = R$$

$$v(z_0) = v_0$$

$$\Rightarrow v(z) = \pm \sqrt{v_0^2 - 2\gamma M \frac{z-R}{zR}}$$

(3) Diskussion :

Damit Geschoss Gravitationsfeld verlassen kann, muss

$$v(z \rightarrow \infty)^2 = v_0^2 - 2\gamma M \frac{1}{R} \geq 0$$

$$\Rightarrow v_0 \geq + \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \text{für } M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}, R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m (Erde)}$$

"2. kosmische Geschwindigkeit"

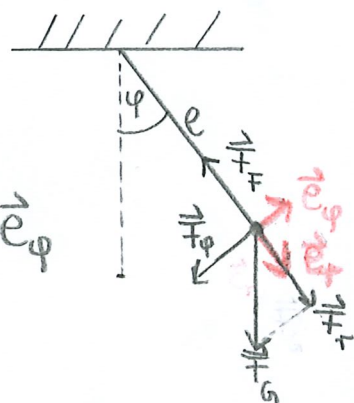
(c) Fadenpendel

26

$$\text{Gewichtskraft: } \vec{F}_G = \vec{F}_r + \vec{F}_\varphi$$

$$= mg \cos \varphi \vec{e}_r - mg \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Fadenkraft: } \vec{F}_F = -F_F \vec{e}_r$$



(1) Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{F}_F = -mg \sin \varphi \vec{e}_\varphi + (mg \cos \varphi - F_F) \vec{e}_r \quad | \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \dot{r} \dot{\varphi}}_{=0} + \underbrace{r \ddot{\varphi}}_{=l} = -g \sin \varphi$$

$$\Rightarrow l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

nichtlineare DGL 2. Ordnung (nichttrivial!)

(2) Lösung:

(i) Näherung $\sin \varphi = \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2)$

$$l \ddot{\varphi} + g \varphi = 0 \quad \text{für kleine } \varphi$$

homogene lineare DGL 2. Ordnung

(ii) Lösungsansatz $\varphi(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$
 $\Rightarrow \omega = \sqrt{g/l}$

(iii) Anfangsbedingungen:

$$\varphi(t=0) = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

(3) Interpretation:

- Kleine Auslenkungen ($\varphi_0 \ll 2\pi$): Harmonische Schwingung mit Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (unabhängig von u und φ_0)
- Anwendung: Pendeluhr

2.5 Harmonischer Oszillator

28

(A) Freier linearer Oszillator

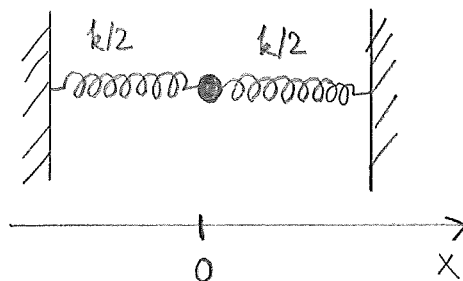
Charakteristische Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Beispiele:

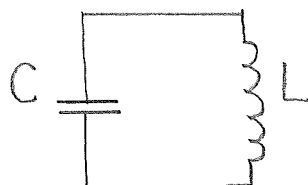
- Elastischer Federschwinger

$$m \ddot{x} + kx = 0 \leadsto \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



- Elektrischer Schwingkreis

$$L \ddot{I} + \frac{1}{C} I = 0 \leadsto \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

$\uparrow$ Amplitude $\uparrow$ Phase

$\swarrow$ Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$

Diskussion:

- Harmonische Schwingung: ω unabhängig von Anfangsbedingungen (x_0, α_0)

(B) Gedämpfter linearer Oszillator

Charakteristische Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Beispiele:

- Elastischer Federschwinger mit Stokesscher Reibung $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$,
 $\beta = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Elektrischer Schwingkreis mit Widerstand R , $\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Lösung der Differentialgleichung:

(i) Ansatz: $x(t) = C e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

(ii) Allgemeine Lösung ($\beta \neq \omega_0$): $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Diskussion:

(a) Schwingfall ($\beta < \omega_0$):

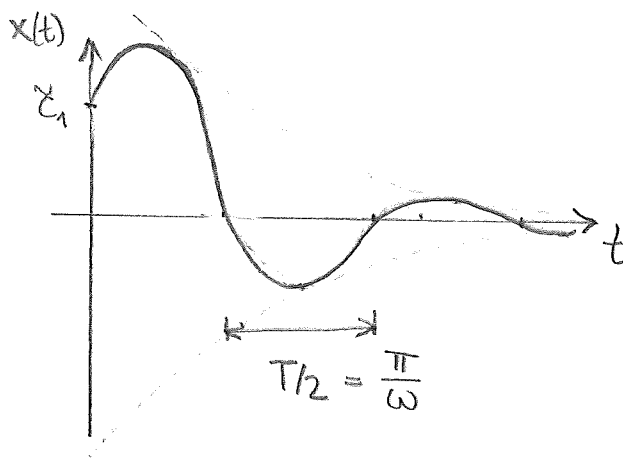
$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}_{=: \omega \text{ reell}} = -\beta \pm i\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad \text{mit } C_{1,2} \in \mathbb{C}$$

$$= e^{-\beta t} \left[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{=\tilde{c}_1} \cos \omega t + i \underbrace{(c_1 - c_2)}_{=\tilde{c}_2} \sin \omega t \right]$$

$$= \tilde{c}_1 e^{-\beta t} \cos \omega t + \tilde{c}_2 e^{-\beta t} \sin \omega t \quad \text{mit } \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$$

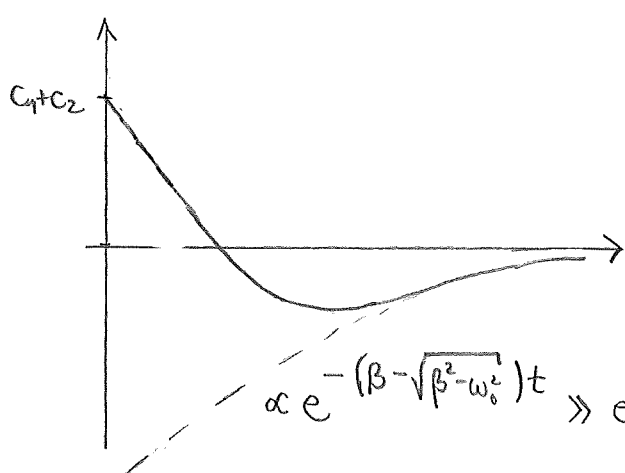
- Amplitude exponentiell gedämpft $\propto e^{-\beta t}$, charakteristische Zeit $\sim 1/\beta$
- Dämpfung reduziert Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$



(b) Kriechfall ($\beta > \omega_0$):

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{< \beta} < 0 \quad \text{reell}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t} \left(c_1 e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



für große Zeiten vernachlässigbar

$$\propto e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \gg e^{-\beta t} \quad \text{für große } t$$

- System nicht schwingungsfähig, höchstens 1 Nulldurchgang
- Auslenkung exponentiell unterdrückt, aber verlängerte charakteristische Zeit $\sim \frac{1}{\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} > \frac{1}{\beta}$

(c) Aperiodischer Grenzfall ($\beta = \omega_0$):

$$\lambda_{1,2} = -\beta \quad \text{doppelte Nullstelle}$$

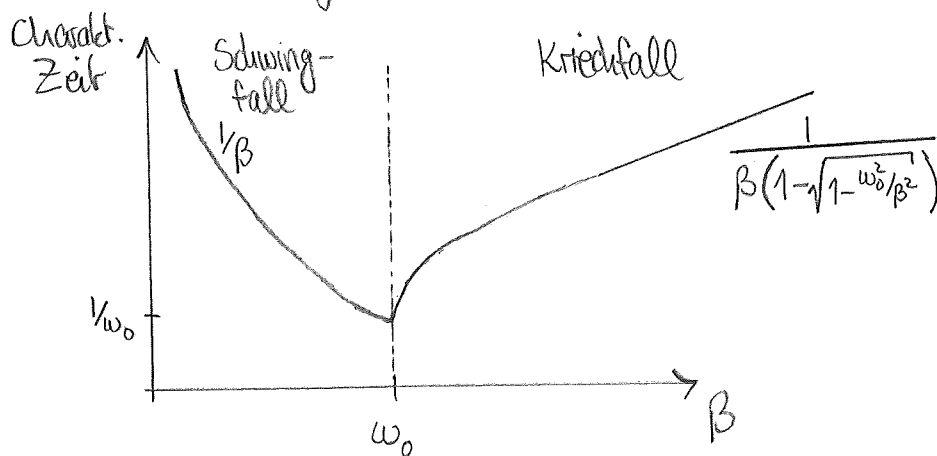
$\Rightarrow$ unabhängige Lösungen: $e^{-\beta t}$, $t e^{-\beta t}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}$

- System nicht schwingungsfähig
- Charakteristische Zeit $\sim \frac{1}{\beta} \Rightarrow$ „optimale Dämpfung“
- Anwendungen: Schwingungsdämpfer, analoge Messinstrumente

6.VL

(d) Zusammenfassung:



(C) Gehtelener linearer Oszillator

Charakteristische Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Beispiele:

- Elastischer Federschwinger mit externer Kraft $F(t)$
- Schwingkreis mit Spannungsquelle

Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

↑
Allg. Lsg. der homogenen
DGL, exponentiell
unterdrückt, siehe (B)

↑
Spezielle Lsg. der
inhomogenen DGL, relevante Lsg.
für $t \gg 1/\beta$

(a) Periodische Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

Strategie: Lösen zunächst verwandte DGL

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

Ansatz: $x_p(t) = A e^{i\Omega t}$ mit $A = \text{konst.}$

$$\Rightarrow (-\Omega^2 + 2\beta\Omega i + \omega_0^2) A e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\beta\Omega i} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\beta\Omega i}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2} =: |A| e^{i\varphi_0}$$

mit $|A| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$

$$\tan \varphi_0 = \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A} = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad -\pi < \varphi_0 < 0$$

Lösung der reellen DGL:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \operatorname{Re}(|A| e^{i\varphi_0 + i\Omega t}) \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Diskussion:

- Frequenz folgt äußerer Kraft („erzwungene Schwingung“)
- Amplitude maximal für $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < \omega_0$ falls $\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ („Resonanz“)
- Phasenverschiebung $\varphi_0 \rightarrow \begin{cases} 0 & , \Omega \ll \omega_0 \\ -\pi & , \Omega \gg \omega_0 \end{cases}$

(b) Allgemeine Kraft $F(t)$

Strategie: Fourier-Transformation $F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{i\Omega t} \tilde{F}(\Omega)$

Lösung:
$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{i\Omega t} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\beta\Omega i}$$

Anwendungen:

- Trommelfell
- Schaukel
- Brückenkonstruktion

2.6 Arbeit und Energie

Arbeit: Bewegt sich eine Punktmasse in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r}$, dann ist

$$\delta W := \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

die Arbeit, die die Kraft an der Punktmasse verrichtet

Folgerung (Arbeit entlang eines Weges $\mathcal{C}$ von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$):

$$W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

falls $\vec{r}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, Parameterdarstellung von $\mathcal{C}$ mit
Linienelement $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$

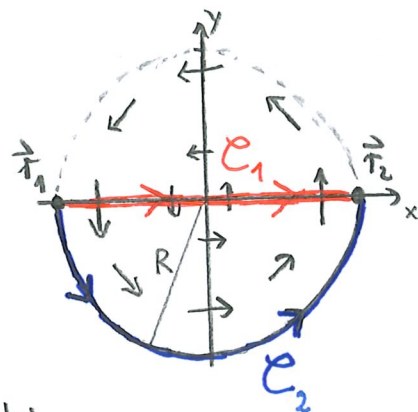
Bemerkung: Arbeit $W_{\mathcal{C}}$ ist i. Allg. wegababhängig.

Beispiel:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \alpha R \vec{e}_{\varphi}$$

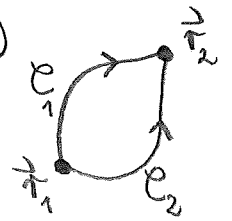
$$W_{\mathcal{C}_1} = 0 \quad \text{da } d\vec{r} \perp \vec{F}$$

$$W_{\mathcal{C}_2} = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{-\pi}^0 d\varphi \alpha R = \alpha \pi R \neq W_{\mathcal{C}_1}$$



Konservatives Kraftfeld: Ist die Arbeit eines Kraftfeldes (35)

$\vec{F}(\vec{r})$ entlang eines beliebigen Weges $\mathcal{C}$ nur von Anfangs- und Endpunkt von $\mathcal{C}$ abhängig, so heißt $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ.



Äquivalente Definitionen konservativer Kraftfelder:

- (1) $\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ für beliebigen geschlossenen Weg $\mathcal{C}$
- (2) $\text{rot } \vec{F} = 0$ mit $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
- (3) Es existiert Funktion $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.
 $V(\vec{r})$ heißt Potential der Kraft $\vec{F}(\vec{r})$.
- (4) $\delta W = dW$ ist ein totales Differential

Beweis von (4):

$$dW(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i + \frac{\partial W}{\partial t} dt$$

$$\delta W(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r}$$

$$dW = \delta W \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} W \text{ und } \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} = 0 = \frac{\partial W}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ konservativ}$$

Leistung: verrichtete Arbeit pro Zeiteinheit

$$P := \frac{dW_e}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{F}(\vec{r}(t'), \dot{\vec{r}}(t'), t')$$

Folgerung:

$$P(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

Bemerkung: Normalkräfte ($\vec{F} \perp \vec{v}$) verrichten keine Arbeit

Kinetische Energie: Arbeit, um eine Punktmasse aus der Ruhe in Bewegung zu versetzen

$$T := W_{\mathcal{L}(\dot{\vec{r}}(t_1)=0 \rightarrow \dot{\vec{r}}(t_2)=\vec{v})}$$

Folgerungen:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$$

$$= m \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}_{= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}^2}$$

falls $m = \text{konst.}$

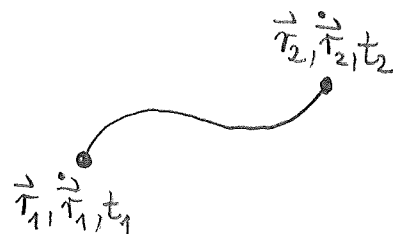
$$= \frac{m}{2} \left(\dot{\vec{r}}(t_2)^2 - \dot{\vec{r}}(t_1)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m}{2} \vec{v}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} T = m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{F} = P}$$

Zusammenhang Arbeit und kinetische Energie:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} dt P(t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dT}{dt} \\ &= T_2 - T_1 \end{aligned}$$



Zusammenhang Arbeit und Potential (konservative Kräfte):

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V}_{\substack{\text{falls } \vec{F} = -\vec{\nabla} V \text{ konservativ} \\ = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} V(\vec{r}(t))}} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dV}{dt} \\ &= V_1 - V_2 \stackrel{!}{=} T_2 - T_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Mechanische Gesamtenergie:

$$E := T + V = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$$

$\nwarrow$ kinetische Energie $\nwarrow$ potentielle Energie

Energieerhaltungssatz (konservative Kräfte):

$$\boxed{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = E = \text{konst.}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}(T+V) = 0}$$

Energiesatz (beliebige Kräfte):

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\text{mit } \vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla} V$$

$$m \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}^2} = - \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V}_{\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t))} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(T+V) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}}$$

$\uparrow$
Änderung der mechanischen
Gesamtenergie

$\uparrow$
Leistung der dissipativen
Kräfte

Beispiele (dissipative Kräfte):

- Reibungskräfte (Umwandlung von mechanischer in Wärmeenergie)
- Äußere Kräfte, z.B. getriebener Oszillator (Energietransfer)

Anwendungen (Energieerhaltungssatz):

(i) Energiemethode zur Lösung 1-dimensionalen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{d}{dx}V(x) \quad \text{mit } V(x) = -\int_{x_0}^x dx' F(x') + V(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$\Rightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

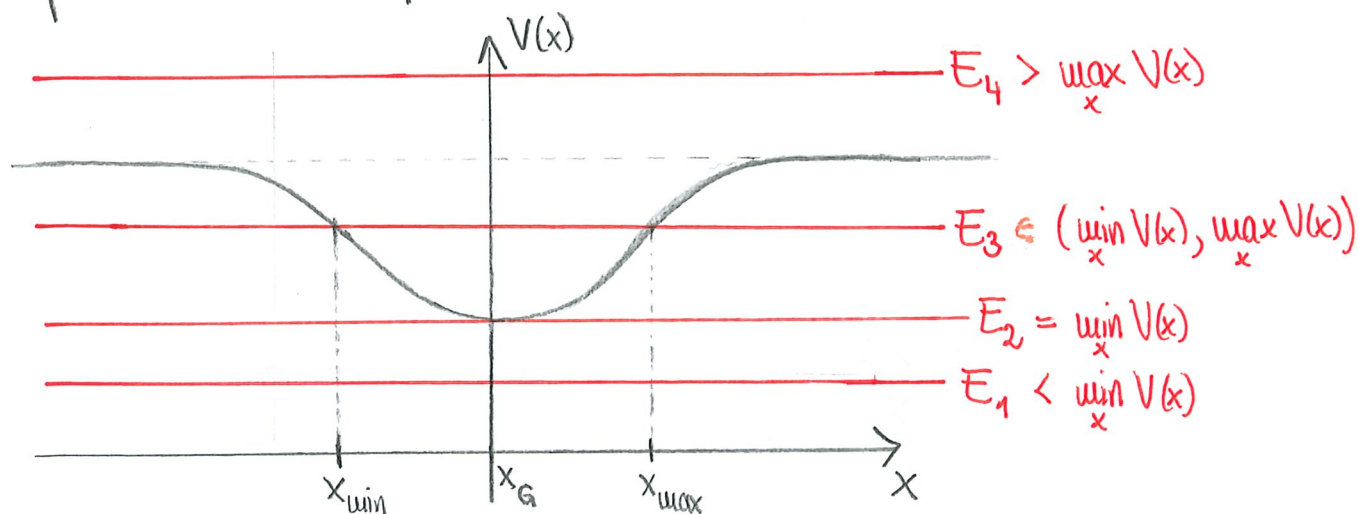
(ii) Qualitative Diskussion der Bewegung

$$\frac{m}{2} v^2 = E - V(x) \geq 0$$

Klassisch erlaubter Bereich: $E \geq V(x)$

Klassisch verbotener Bereich: $E < V(x)$

Beispiel (Potentialtopf):



- (i) $E = E_1 < \min_x V(x)$: Keine Lösung
- (ii) $E = E_2 = \min_x V(x)$: Stabiles Gleichgewicht $x(t) = x_G = \text{konst.}$, $v(t) = 0$
- (iii) $E = E_3 \in (\min_x V(x), \max_x V(x))$: Gebundene Bewegung mit $x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max}$

$$\dot{x}|_{x_{\min}} = \dot{x}|_{x_{\max}} = 0$$

$$\ddot{x}|_{x_{\min}} = \frac{F}{m}|_{x_{\min}} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}|_{x_{\min}} > 0 \Rightarrow v \text{ wird positiv}$$

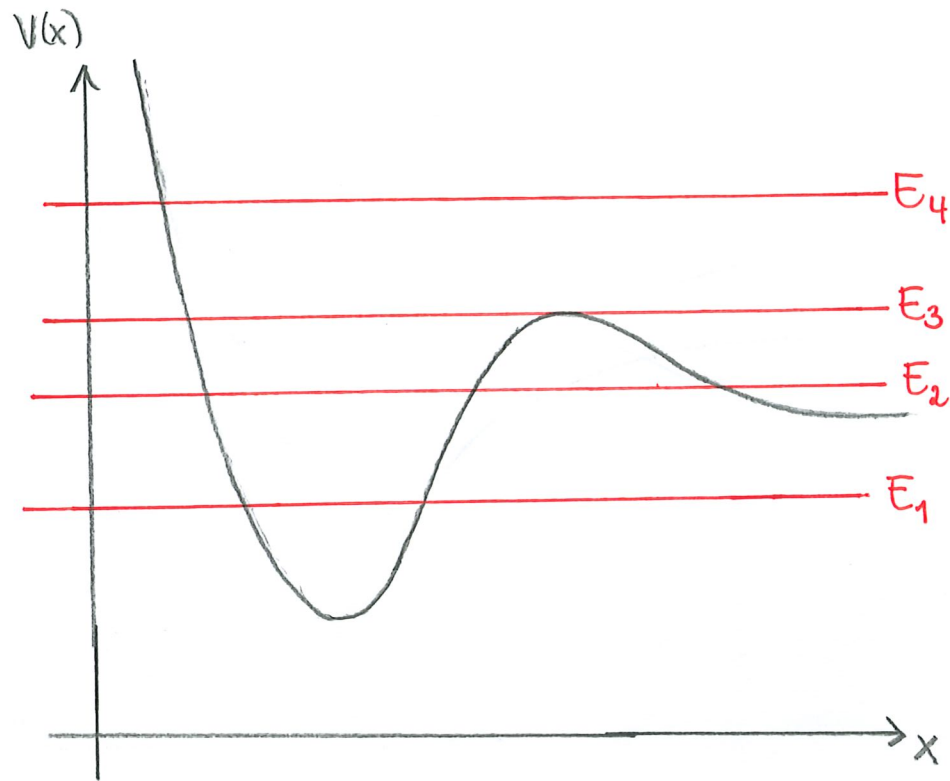
$$\ddot{x}|_{x_{\max}} < 0 \Rightarrow v \text{ wird negativ}$$

$\Rightarrow$ Oszillation zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$

- (iii) $E = E_4 > \max_x V(x)$: Ungebundene Bewegung mit $v(t) \neq 0$ für alle t

Beispiel (Reflektion):

41



(i) $E = E_1$: Oszillation

(ii) $E = E_2$: 2 Lösungstypen (Oszillation, Reflektion)

(iii) $E = E_3$: 3 Lösungstypen (gebundene Bewegung, labiles Gleichgewicht, ungebundene Bewegung)

(iv) $E = E_4$: Reflektion

2.7 Drehimpuls und Drehmoment

Drehimpuls: $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Drehmoment: $\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$

Zusammenhang Drehimpuls und Drehmoment:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \vec{r} \times (\dots)$$

$$\Rightarrow m \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}_{= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{= \vec{M}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}} \quad \text{"Drehimpulssatz"}$$

Drehimpulserhaltungssatz:

$$\boxed{\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \vec{L} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{konst}}$$

Folgerung: Drehimpuls ist erhalten, wenn

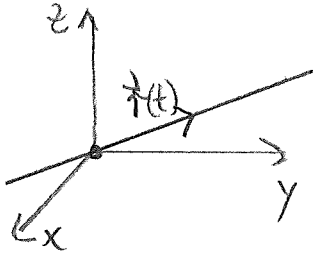
(i) $\vec{F} \equiv 0$

(ii) $\vec{F} \parallel \vec{r} \Leftrightarrow \vec{F}$ ist Zentralkraft

Bemerkung: Drehimpuls ist von Wahl des Bezugssystems abhängig.

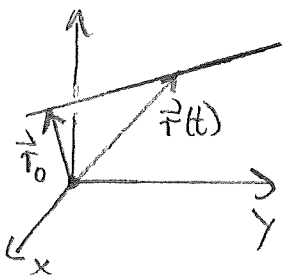
Beispiel (geradlinig gleichförmige Bewegung):

(a)



$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}_0 = 0$$

(b)



$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{r}_0 \times m \vec{v}_0 \neq 0$$

2.8 Bewegung im Zentralkraftfeld

Drehimpulserhaltung: Für Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \vec{e}_r$$

ist der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten.

Bahnebene: Für $\vec{L} = \text{konst.}$ gilt

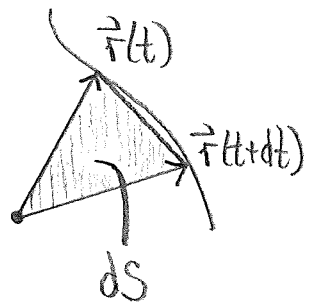
$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad \text{Ebengleichung mit Normalenvektor}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$$

In Zentralkraftfeld erfolgt Bewegung in der zum Drehimpuls $\vec{L}$ senkrechten Ebene, die den Koordinatenursprung enthält.

Flächensatz: Vom Ortsvektor $\vec{r}(t)$ pro Zeit überschlossene Fläche (44)

$$dS = \frac{1}{2} \left| \underbrace{\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)}_{=\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) dt} \right|$$



$$= \frac{1}{2} \underbrace{|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|}_{=\frac{|\vec{L}|}{m}} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{konst.}}$$

Im Zentralkraftfeld überschleitet der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Konservatives Zentralkraftfeld:

$$\vec{F} = f(\vec{r}) \vec{e}_r \stackrel{!}{=} -\vec{\nabla} V = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -f(r, \vartheta, \varphi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Leftrightarrow V = V(r) \quad \text{mit} \quad f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Für ein konservatives Zentralkraftfeld hängt das Potential V nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ ab („Zentralpotential“)

Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld:

(1) Drehimpulserhaltung: Wählen $\vec{e}_z \parallel \vec{L} \Rightarrow$ Bewegung in xy -Ebene

$$|\vec{L}| = m \left| \underbrace{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}_{= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi} \right| = m r \dot{\varphi} \stackrel{!}{=} \text{konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{m r}$$

(2) Energieerhaltung:

$$\underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} + V(r) = E = \text{konst}$$

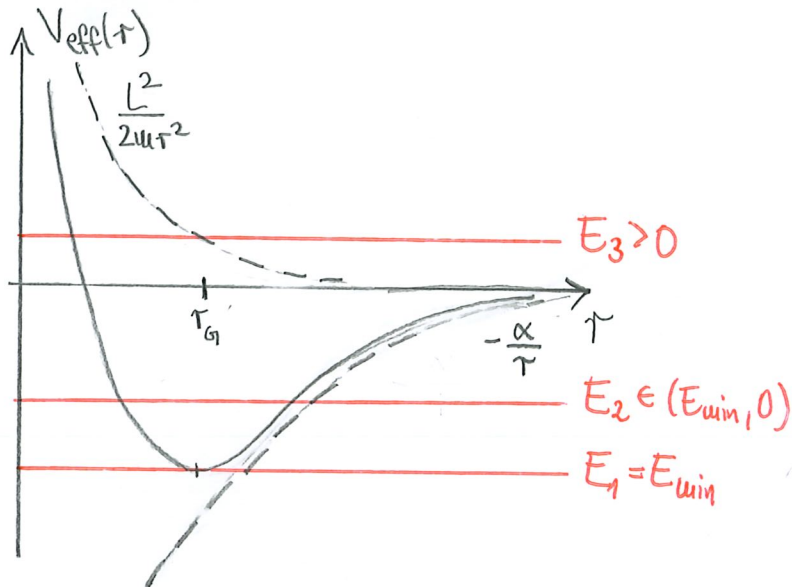
$$\Rightarrow \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} \right) + V(r) = E$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{V(r) + \frac{L^2}{2m r^2}}_{=: V_{\text{eff}}(r)} = E}$$

Im konservativen Zentralkraftfeld entspricht das Verhalten von $r(t)$ einer 1-dimensionalen Bewegung im effektiven Potential $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2m r^2}$.

Beispiel ($\frac{1}{r}$ -Potential):

46



- (i) $E_1 = E_{\min}$: Kreisbewegung mit $r(t) = r_G$
- (ii) $E_2 \in (E_{\min}, 0)$: Gebundene Bewegung mit $r_{\min} \leq r(t) \leq r_{\max}$
- (iii) $E_3 > 0$: Ungebundene Bewegung mit $r(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ ("Streuung")

9.VL

2.9 Kepler-Problem

Kepler-Problem: Bewegung eines Punktwasses im konservativen Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(r) = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

Beispiele:

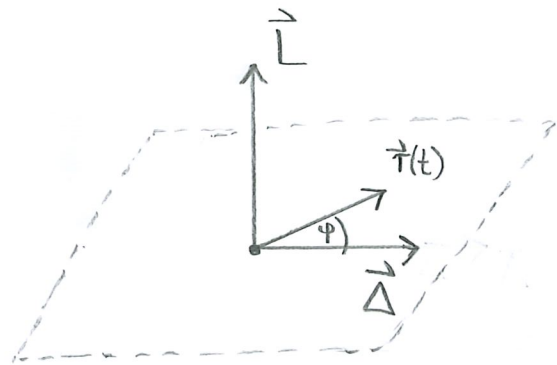
- (1) Planet im Gravitationsfeld der Sonne, $\alpha = -GMm$
- (2) Rutherford'sches Atommodell, $\alpha = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$

Runge-Lenz-Vektor: $\vec{\Delta} := \frac{1}{|\alpha|} (\dot{\vec{r}} \times \vec{L} + \frac{\alpha}{r} \vec{r})$

Eigenschaften:

(1) $\vec{\Delta}$ liegt in Bahnebene, $\vec{\Delta} \perp \vec{L}$

(2) $\vec{\Delta}$ ist erhalten, $\frac{d}{dt} \vec{\Delta} = 0$



Beweis von (2):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\Delta}} &= \frac{1}{|\alpha|} \left(\underbrace{\ddot{\vec{r}} \times \vec{L}}_{= m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}} - \frac{\alpha}{r^2} \dot{\vec{r}} \vec{r} + \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{1}{m} \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad \vec{r} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\vec{r}}{r} 2(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha}{|\alpha|} \left(\frac{1}{r^3} \underbrace{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})} - \frac{\vec{r}}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right)$$

$$= 0$$

Bahnkurve:

$$\vec{r} \cdot \vec{\Delta} = r \Delta \cos \varphi \quad \text{mit } \varphi = \angle(\vec{\Delta}, \vec{r})$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{\Delta} &= \frac{1}{|\alpha|} \left[\underbrace{\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L})}_{\vec{L} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{m} \vec{L} \cdot \vec{L}} + \frac{\alpha}{r} \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{r}}_{r^2} \right] = \frac{L^2}{|\alpha| m} + \frac{\alpha}{|\alpha|} r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \left(\Delta \cos \varphi - \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) = \frac{L^2}{|\alpha| m}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(\varphi) = \frac{L^2}{|\alpha| m} \frac{1}{\Delta \cos \varphi - \frac{\alpha}{|\alpha|}}$$

Folgerung: Bahnkurve (bis auf Ähnlichkeitstransformationen) eindeutig durch $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1$ (abstoßendes / anziehendes Potential) und Betrag $\Delta = |\vec{\Delta}|$ bestimmt

Zusammenhang Δ und L, E :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \vec{\Delta} \cdot \vec{\Delta} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} + \frac{\alpha}{r} \vec{r} \right) \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} + \frac{\alpha}{r} \vec{r} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left[\underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{L})^2}_{= \dot{\vec{r}}^2 \vec{L}^2, \text{ da } \dot{\vec{r}} \perp \vec{L}} + \alpha^2 + 2 \frac{\alpha}{r} \vec{r} \cdot \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{L})}_{= \frac{1}{m} \vec{L}^2} \right] \\ &= 1 + \frac{2 L^2}{\alpha^2 m} \underbrace{\left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r} \right)}_{= E} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{1 + \frac{2 L^2 E}{\alpha^2 m}}$$

Folgerung: Energieerhaltung ist in Konstanz von Δ und L enthalten.

Geometrische Bedeutung von $\frac{\vec{\Delta}}{|\vec{\Delta}|}$:

(49)

$r(\varphi)$ wird minimal für $\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{L}$

$\frac{\vec{\Delta}}{|\vec{\Delta}|}$ zeigt in Richtung des zum Zentrum nächsten Punktes der Bahnkurve

Bahnkurve für Gravitationspotential $\alpha = -\gamma M m < 0$:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos\varphi}}$$

$$\text{mit } k := \frac{L^2}{\gamma m^2 M} > 0$$

$$\varepsilon := \Delta = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3}} \geq 0$$

Polarkoordinatendarstellung eines Kegelschnittes mit Halbparameter k und Exzentrizität ε .

Fallunterscheidung:

(A) $\varepsilon = 0$: $r(\varphi) = k = \text{konst} \Rightarrow$ Kreisbahn mit

$$\text{Energie } E = -\frac{\gamma^2 M^2 m^3}{2L^2} =: E_{\min} < 0$$

(B) $0 < \varepsilon < 1$: $r(\varphi) \in [r_{\min}, r_{\max}]$ mit $r_{\min} = \frac{k}{1 + \varepsilon}$ „Perihel“ (sonnenrächster Punkt)
und $r_{\max} = \frac{k}{1 - \varepsilon}$ „Aphel“ (sonnenfernster Punkt)

$\Rightarrow$ Ellipsenbahn mit Energie $E \in (E_{\min}, 0)$

(C) $\varepsilon = 1$: $r(\varphi) \in [r_{\min}, \infty)$ mit $r_{\min} = \frac{k}{1+\varepsilon}$
 und $r(\varphi) < \infty$ für $\varphi \neq \pi$

$\Rightarrow$ Parabelbahn mit Energie $E = 0$

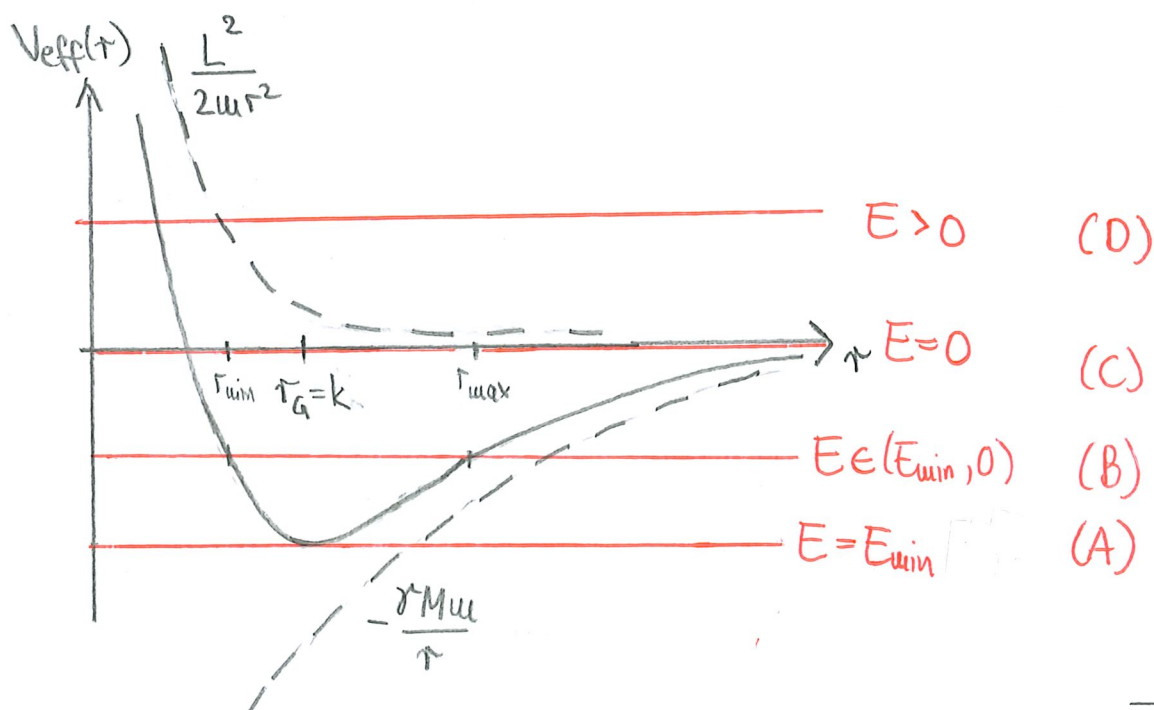
(D) $\varepsilon > 1$: $r(\varphi) \in [r_{\min}, \infty)$ mit $r_{\min} = \frac{k}{1+\varepsilon}$
 und $r(\varphi) \rightarrow \infty$ für $\varphi \rightarrow \pm \arccos \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Hyperbelbahn mit Energie $E > 0$

Beschreibung im effektiven Potential :

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2m r^2} - \gamma M m \frac{1}{r}$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left(\underbrace{\frac{1}{r}}_{=1/k} - \underbrace{\frac{\gamma M m^2}{L^2}}_{=E_{\min}} \right)^2 - \underbrace{\frac{\gamma^2 M^2 m^3}{2L^2}}_{=E_{\min}}$$



Folgerungen (Keplersche Gesetz):

- (1) Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
- (2) Der von der Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- (3) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnkurven.

Beweis:

$$(1) \quad r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } 0 \leq \varepsilon < 1 \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = r + \varepsilon \underbrace{r \cos \varphi}_x$$

$$\Rightarrow r = k - \varepsilon x$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = k^2 - 2k\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$$

$$\Rightarrow (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2k\varepsilon x + y^2 - k^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2k\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} x + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} - \frac{k^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} (1 - \varepsilon^2) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{k\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \left(\frac{k}{1 - \varepsilon^2} \right)^2$$

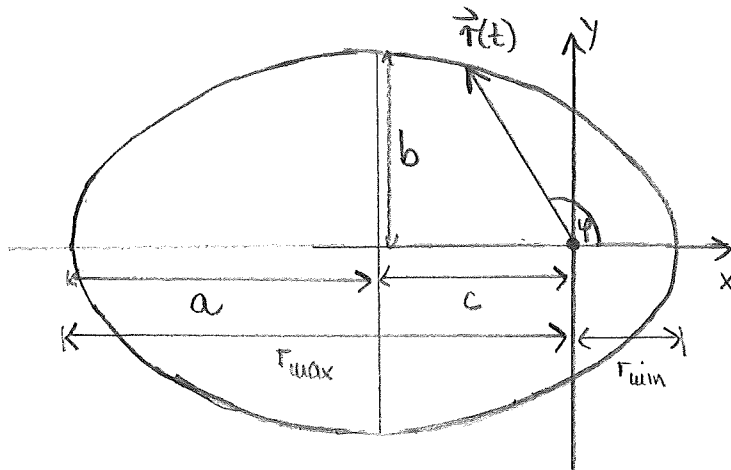
$$\Rightarrow \frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ellipsengleichung mit

$$a = \frac{k}{1-\epsilon^2} \quad (\text{gro\ss e Halbachse})$$

$$b = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \sqrt{1-\epsilon^2} a \quad (\text{kleine Halbachse})$$

$$e = \frac{k \epsilon}{1-\epsilon^2} = a \epsilon \quad (\text{lineare Exzentrizit\"at})$$



$$(2) \quad \vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \text{konst} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{konst.} \quad (\text{Fl\"achensatz}) \quad (\text{Kap. 2.8})$$

$$(3) \quad \text{In einem Umlauf \u00fcberschnittene Fl\"ache: } S_{0 \rightarrow 2\pi} = \frac{L}{2m} T \quad \leftarrow \text{Umlaufdauer} \\ \stackrel{!}{=} \pi ab$$

$$\Rightarrow T = 2\pi m ab \cdot \frac{1}{L}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^2 &= 4\pi^2 m^2 a^2 \underbrace{b^2}_{= a^2(1-\epsilon^2)} \underbrace{\frac{1}{L^2}}_{= \frac{1}{k \gamma m^2 M}} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \\ &= a^2 \cdot \frac{k}{a} \\ &= ak \end{aligned}$$

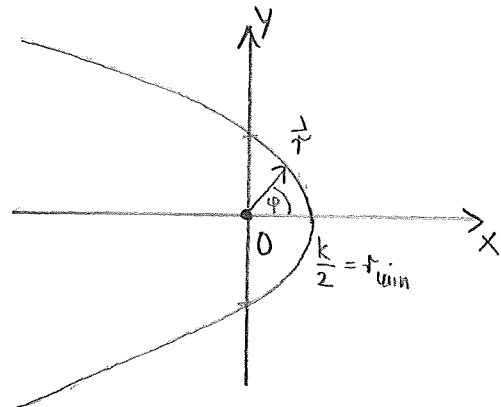
$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{konst.} \quad (\text{unabhängig von } m, b)$$

(53)

Ungebundene Bewegungen:

(a) $E=0$: Parabelbahn

$$\varepsilon=1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} y^2 = -2k\left(x - \frac{k}{2}\right)$$

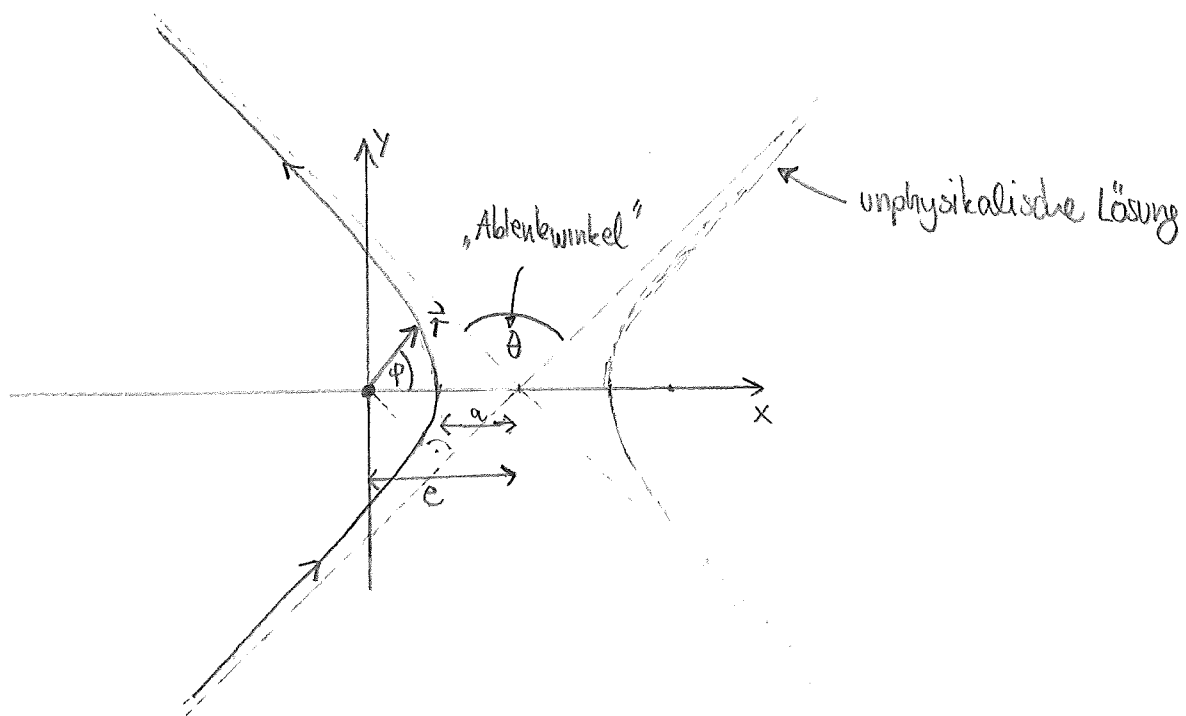


(b) $E>0$: Hyperbelbahn

$$\varepsilon>1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \left(x - \frac{k\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{\varepsilon^2-1} = \left(\frac{k}{\varepsilon^2-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x-e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Hyperbelgleichung}$$

mit $a = \frac{k}{\varepsilon^2-1}$, $b = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$, $e = \frac{k\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$, $r_{\min} = \frac{k}{\varepsilon+1} = e-a$



Anmerkung (abstoßende Kraft):

Für $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$ mit $\alpha > 0$ gibt es nur Lösungen mit $E > 0$:

$$r(\varphi) = \frac{k}{\varepsilon \cos \varphi - 1} \Rightarrow \varepsilon > 1, \quad r_{\min} = \frac{k}{\varepsilon - 1} = e + a$$

$\Rightarrow$ physikalische Lösung ist zentrumsferner Ast der Hyperbel