

3 Mehrteilchensysteme

3.1 Erhaltungssätze

Kraft auf Teilchen i :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ij}, \quad i=1, \dots, N$$

$\uparrow$ äußere Kraft $\uparrow$ von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte Kraft

Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ij} \quad \text{mit} \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Gesamtmasse: $M := \sum_{i=1}^N m_i$

Gesamtimpuls: $\vec{P} := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$

Gesamtkraft: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} =: \vec{F}^{\text{ext}}$

Schwerpunkt: $\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

Schwerpunktsatz:

$$\boxed{M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

Beweis: $M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}^{\text{ext}}$

Impulssatz: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}^{\text{ext}}$

Impulserhaltungssatz:

$$\vec{p} = \text{konst.} \Leftrightarrow \vec{F}^{\text{ext}} = 0$$

Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} := \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

Gesamtdrehmoment: $\vec{M}^{\text{ext}} := \sum_i \vec{M}_i^{\text{ex}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$

Drehimpulssatz (beliebige Kräfte):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_i \vec{r}_i \times \underbrace{(m_i \ddot{\vec{r}}_i)}_{=\vec{F}_i} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}}_{=\vec{M}^{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}_{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji})} \\ &= \vec{M}^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{M}^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Drehimpulserhaltungssatz (innere Zentralkräfte):

Für $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$ gilt

$$\vec{L} = \text{konst.} \Leftrightarrow \vec{M}^{\text{ext}} = 0$$

Energieerhaltungssatz (konservative Kräfte):

Falls alle Kräfte $\vec{F}_i$ konservativ sind, dann existiert Potential $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$, so dass

$$\vec{F}_i = - \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V \quad | \cdot \dot{\vec{r}}_i | \sum_i (\dots)$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i}_{= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i^2} = - \underbrace{\sum_i (\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{= \frac{dV}{dt}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = 0 \quad \text{mit } T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = T + V = \text{konst.}}$$

Erhaltung der Gesamtenergie

Energiesatz (allgemeine Kräfte):

Für $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{kons}} + \vec{F}_i^{\text{diss}}$ mit $\vec{F}_i^{\text{kons}} = - \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$ gilt:

$$\frac{d}{dt} T = - \frac{d}{dt} V + \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i}$$

3.2 Virialsatz

Zeitlicher Mittelwert: $\langle f \rangle := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt f(t)$

Kinetische Energie im zeitlichen Mittel:

$$\begin{aligned}
 \langle T \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_i m_i \left(\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) - \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \right\rangle}_{\substack{t_0+\tau \\ t_0}} - \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right\rangle \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right]_{t=t_0}^{t=t_0+\tau} \\
 &= 0 \quad \text{falls Bewegung gebunden}
 \end{aligned}$$

Virialsatz: Für gebundene Bewegungen gilt allgemein

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle}$$

↑
„Virial der Kräfte“

Anwendung (abgeschlossenes System mit konserv. Zentralkräften):

(59)

Falls $\vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$ und $\vec{F}_{ij} = -\alpha_{ij} q \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{2-q}}$, dann gilt:

$$-\left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = -\left\langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$= + \left\langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \alpha_{ij} q |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{q-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$= q \left\langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{1}{2} \left[\alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{q-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i + \alpha_{ji} |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^{q-2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_j \right] \right\rangle$$

$$\stackrel{\alpha_{ij} = \alpha_{ji}}{=} q \left\langle \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{q-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \right\rangle$$

$$= q \langle V \rangle$$

$$\text{mit } V = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^q \text{ und}$$

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \langle T \rangle = q \langle V \rangle}$$

Beispiele:

(i) Gekoppelte harmonische Oszillatoren $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_i - \vec{r}_j \Rightarrow q=2$

$$\Rightarrow \langle T \rangle = \langle V \rangle$$

$$\Rightarrow E = \langle E \rangle = \langle T+V \rangle = 2\langle T \rangle \geq 0$$

(ii) Geladene Teilchen mit Coulomb-Wechselwirkung $\vec{F}_{ij} \propto \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \Rightarrow q=-1$

$$\Rightarrow 2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$$

$$\Rightarrow E = \langle E \rangle = \langle T+V \rangle = -\langle T \rangle \leq 0 \quad \text{für gebundene Bewegungen}$$

12.VL

3.3 Zweikörperproblem

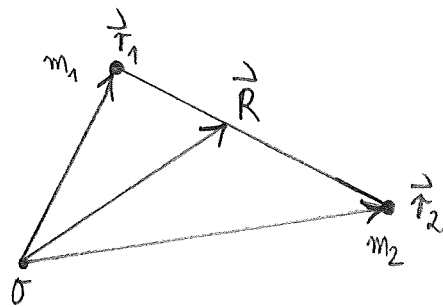
Schwerpunkt (N=2): $\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$ mit $M = m_1 + m_2$

Relativvektor (N=2): $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Dann gilt

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$



Reduzierte Masse : $\mu := \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$:

(1) $\boxed{M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}}$ (Schwerpunktsatz)

(2) $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2$

$$= \frac{1}{m_1} (\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12}) - \frac{1}{m_2} (\vec{F}_2^{\text{ext}} + \underbrace{\vec{F}_{21}}_{= -\vec{F}_{12}})$$

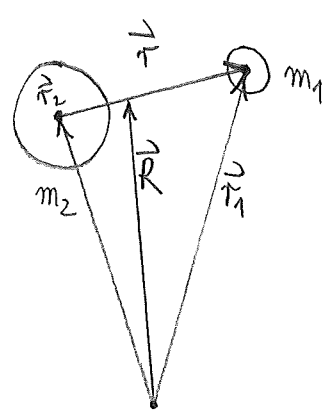
$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_1^{\text{ext}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ext}}}{m_2} + \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}}$

Anwendung (abgeschlossenes System):

Für $\vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$ gilt $\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}}$.

Falls zusätzlich $\vec{F}_{12}$ unabhängig von $\vec{R}$ ist, dann entkoppeln die Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ zu jeweils Einteilchenproblemen mit effektiven Massen M und μ .

Beispiel (Planetenbewegung):



$$M \ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

⇒ Bahnkurven beider Punktwasse sind Ellipsen

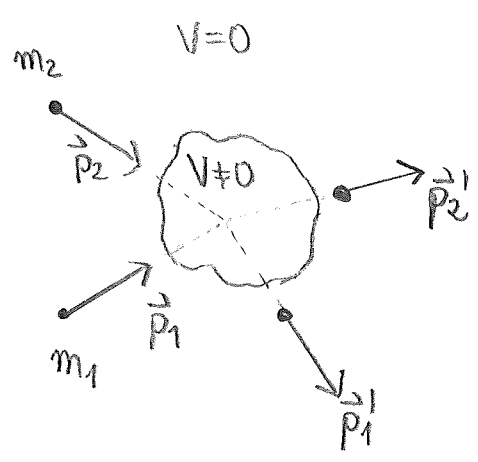
Anwendung (Zweikörperstoß):

Annahmen:

(1) $\vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{F}_2^{\text{ext}} = 0$

(2) $\vec{F}_{12}$ nur von $\vec{r}$ abhängig

(3) $\vec{F}_{12}$ vernachlässigbar für genügend große $|\vec{r}|$ (endlicher Wechselwirkungsbereich)



Impulserhaltung: $\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{konst.}$ ($\vec{P}=0$ im Schwerpunktsystem)

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Energiesatz: $\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m_2} + Q'$
 während Streuprozess umgewandelte Energie

Bemerkung: Q' ist invariant unter Galilei-Transformationen $\vec{p}_i \mapsto \vec{p}_i - m_i \vec{v}_0$

$$[Q' = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{p}_i^2 - \vec{p}_i'^2) \mapsto \sum_i \frac{1}{2m_i} [(\vec{p}_i - m_i \vec{v}_0)^2 - (\vec{p}_i' - m_i \vec{v}_0)^2] = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{p}_i^2 - \vec{p}_i'^2) - \underbrace{\sum_i (\vec{p}_i - \vec{p}_i') \vec{v}_0}_{=0} = Q']$$

Fallunterscheidung:

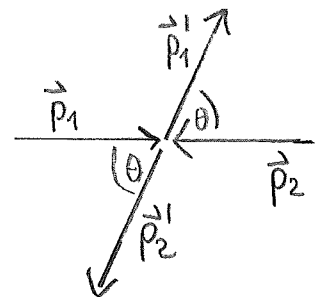
(A) $Q' = 0$ „elastische Streuung“: Energie erhalten

(B) $Q' \neq 0$ „inelastische Streuung“: Energie wird in andere Formen umgewandelt (z.B. Wärme)

Für gegebenes Q' legen Energie- und Impulssatz 4 der 6 unbekannten Komponenten von $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ fest $\Rightarrow$ 2 freie Parameter, z.B. im Schwerpunktsystem:

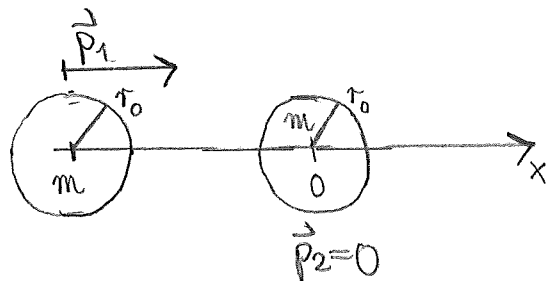
$$\text{Streuwinkel } \theta = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_1') = \angle(\vec{p}_2, \vec{p}_2')$$

$$\text{Azimutwinkel } \phi = \angle(\vec{p}_1 - \vec{p}_2\text{-Ebene}, \vec{p}_1' - \vec{p}_2'\text{-Ebene})$$



Beispiel (zentraler elastischer Stoß):

$$\text{Impulserhaltung: } \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



Energieerhaltung:

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m} \quad | \cdot 2m$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1'^2 + \vec{p}_2'^2 + 2\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' = \vec{p}_1'^2 + \vec{p}_2'^2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' = 0$$

$$\vec{p}_1' \parallel \vec{p}_2' \Rightarrow \vec{p}_1' = 0 \quad \text{und} \quad \vec{p}_2' = \vec{p}_1$$

Stoßende Kugel „überträgt“ gesamte kinetische Energie auf ruhende Kugel

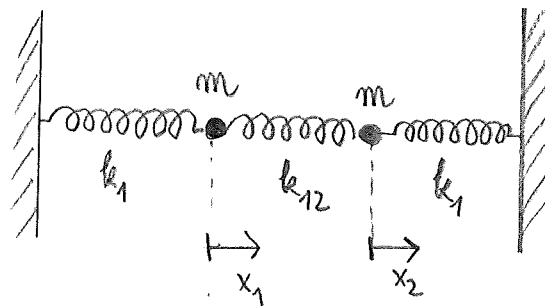
Anwendung (Gekoppelte harmonische Oszillatoren):

(64)

Bewegungsgln.:

$$m \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2)$$

$$m \ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1)$$



Abkürzungen:

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{k_1 + k_{12}}{m}}$$

$$\beta := \sqrt{\frac{k_{12}}{m}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \beta^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \beta^2 x_1 = 0$$

13. VL

Lösungsansatz: $x_j(t) = \alpha_j e^{i\omega t}$, $j=1,2$

$$\Rightarrow (\omega_1^2 - \omega^2) \alpha_1 - \beta^2 \alpha_2 = 0$$

$$-\beta^2 \alpha_1 + (\omega_1^2 - \omega^2) \alpha_2 = 0$$

Bedingung für nichttriviale Lösung:

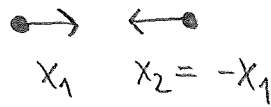
$$\det \begin{pmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\beta^2 \\ -\beta^2 & \omega_1^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 \stackrel{!}{=} \omega_1^2 \pm \beta^2 = \frac{k_1 + k_{12} \pm k_{12}}{m}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_{12}}{m}} =: \omega_+ \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}} =: \omega_-$$

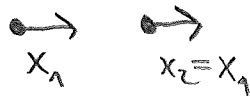
Interpretation:

Eigenmode ω_+ :



$$k_{\text{eff}} = k_1 + 2k_{12}$$

Eigenmode ω_- :



$$k_{\text{eff}} = k_1$$