

4 Mechanik starrer Körper

4.1 Modell des starren Körpers

Starrer Körper: System von Punktmassen m_i , deren Abstände $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ fixiert sind

Mögliche Bewegungen des starren Körpers:

- (1) Translation eines Punktes P
- (2) Rotation um eine Achse $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ durch P („Kreisel“)

Bemerkungen:

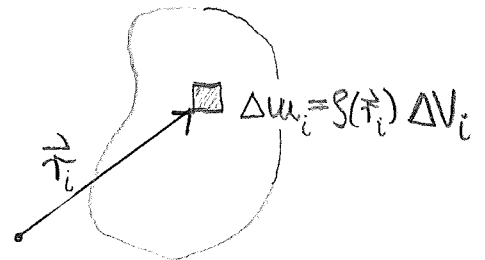
- Momentane Drehachse $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ im Allgemeinen weder körper- noch raumfest
- Anzahl Freiheitsgrade eines starren Körpers: 3 (Translation) + 3 (Rotation) = 6
- Anzahl der Massenpunkte kann groß sein:

Massendichte $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V(\vec{r})}$

Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \Delta V_i$

$$\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\Delta V \rightarrow 0} \int \rho(\vec{r}) d^3 \vec{r}$$

Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3 \vec{r}$



4.2 Kinematik des starren Körpers

67

Bezugssysteme:

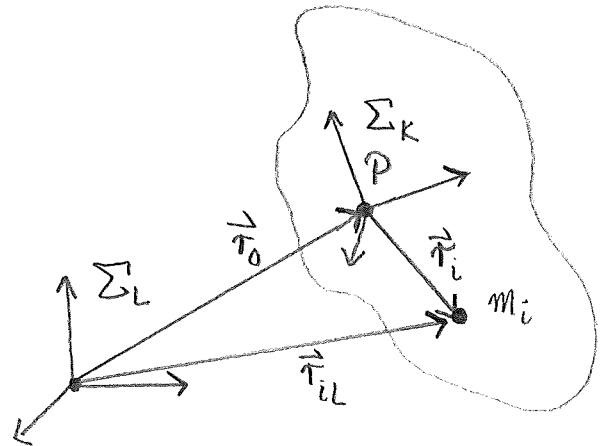
- (1) Laborsystem Σ_L (Inertialsystem)
- (2) Körperfestes System Σ_K (i. Allg. kein Inertialsystem)

Ortsvektor in Σ_L :

$$\vec{r}_{iL}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_i(t)$$

Geschwindigkeit in Σ_L :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_{iL}(t) &= \dot{\vec{r}}_0(t) + \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{r}_i(t)}_{\text{Ableitung in } \Sigma_L} \\ &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)_K \vec{r}_i}_{=0 \text{ } (\Sigma_K \text{ körperfest})} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (\text{Kap. 2.3})\end{aligned}$$



$\dot{\vec{r}}_{iL}(t) = \underbrace{\dot{\vec{r}}_0(t)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t)}_{\text{Rotation}}$

Kinetische Energie:

(68)

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_{iL}^2$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i}_{=M} \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + \dot{\vec{r}}_0 \cdot \underbrace{(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_i)}_{=M \vec{R}_K \text{ Schwerpunkt in } \Sigma_K}$$

Wählen Σ_K so, dass

(i) $\dot{\vec{r}}_0(t) \equiv \text{konst.}$ (falls ein Punkt des Körpers raumfest) oder

(ii) $\vec{R}_K(t) \equiv 0$ (sonst)

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2}_{=T_T \text{ Translationsenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}_{=T_R \text{ Rotationsenergie}}$$

Komponentenschreibweise: $x_{i\alpha} := (\vec{r}_i)_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$

Dann:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 &= \underbrace{\vec{\omega}^2}_{=\sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha^2} \vec{r}_i^2 - \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2}_{=\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta x_{i\alpha} x_{i\beta}} \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta \delta_{\alpha\beta} \\ &\text{mit } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_{\alpha} (\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta}) \omega_{\beta}$$

(69)

Rotationsenergie:

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_{\alpha} J_{\alpha\beta} \omega_{\beta} \\ = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \hat{J} \vec{\omega}$$

$$\text{mit } J_{\alpha\beta} := \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta})$$

„Trägheitstensor“ $\hat{J} = (J_{\alpha\beta})$

Bemerkungen:

(1) Trägheitstensor symmetrisch: $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}$

(2) Kontinuierliche Massenverteilung: $J_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha} x_{\beta})$

(3) Trägheitstensor unabhängig von $\vec{\omega}$ (Eigenschaft des Körpers)

(4) Rotation um gegebene Achse $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$:

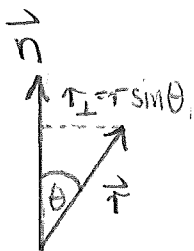
$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \hat{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{n}^T \hat{J} \vec{n}) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \text{ mit}$$

$$J := \vec{n}^T \hat{J} \vec{n} \quad \text{„Trägheitsmoment“ (von Drehachse abhängig!)}$$

Kontinuierliche Massenverteilung:

$$J = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r})^2) = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \underbrace{(\vec{n} \times \vec{r})^2}_{=: r_{\perp}^2}$$

$r_{\perp}$ Abstand zur Drehachse



(5) Analogie zur Translation:

$$T_R = \frac{1}{2} J \omega^2 \leftrightarrow T_T = \frac{1}{2} M v^2$$

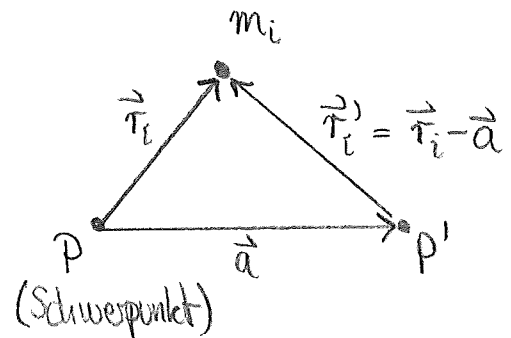
Winkelgeschw. $\omega \leftrightarrow$ Translationsgeschw. v

Trägheitsmoment $J \leftrightarrow$ Masse M

14.VL

Verschiebung des Ursprungs von Σ_K :

$$J'_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta})$$



$$= \sum_i m_i [(\vec{r}_i - \vec{a})^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_{i\alpha} - a_\alpha)(x_{i\beta} - a_\beta)]$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta})}_{= J_{\alpha\beta}^{(s)} \text{ Trägheitstensor für Schwerpunktsystem}} - 2 \delta_{\alpha\beta} \vec{a} \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{= M \vec{R}_K = 0} + \delta_{\alpha\beta} \vec{a}^2 \underbrace{\sum_i m_i}_{= M}$$

$$+ a_\beta \underbrace{\sum_i m_i x_{i\alpha}}_{= M R_{K\alpha} = 0} + a_\alpha \underbrace{\sum_i m_i x_{i\beta}}_{= M R_{K\beta} = 0} - a_\alpha a_\beta \underbrace{\sum_i m_i}_{= M}$$

$$\Rightarrow \boxed{J'_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^{(s)} + M (\vec{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)} \quad \text{"Steinerscher Satz"}$$

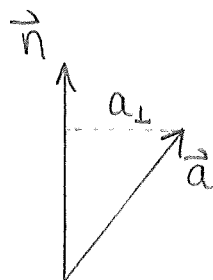
Anwendung (Trägheitsmoment):

(71)

$$J' = \vec{n}^T \hat{J}' \vec{n}$$

$$= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 n_{\alpha} J'_{\alpha\beta} n_{\beta}$$

$$= J^{(s)} + M \underbrace{(\vec{a}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{n})^2)}_{(\vec{a} \times \vec{n})^2 =: a_{\perp}^2}$$



$$\Rightarrow \boxed{J' = J^{(s)} + M a_{\perp}^2}$$

Hauptachsentransformation:

Da $\hat{J}$ symmetrisch und reell, existiert immer eine Basis Σ_K , sodass

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_I & 0 & 0 \\ 0 & J_{II} & 0 \\ 0 & 0 & J_{III} \end{pmatrix} \text{ diagonal.}$$

Die Eigenwerte J_I, J_{II}, J_{III} heißen "Hauptträgheitsmomente".

Die dazugehörigen Eigenrichtungen $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$ heißen "Hauptachsen".

Bemerkungen:

(1) Hauptträgheitsmomente $\hat{=}$ Trägheitsmomente für Rotation um Hauptachsen:

$$\hat{J} \vec{e}_{\eta} = J_{\eta} \vec{e}_{\eta} \quad \text{mit } \eta = I, II, III$$

$$\Rightarrow \vec{n}^T \hat{J} \vec{n} = \vec{e}_{\eta}^T \hat{J} \vec{e}_{\eta} = J_{\eta} \quad \text{für } \vec{n} = \vec{e}_{\eta}$$

(2) Klassifikation starrer Körper:

- (i) Unsymmetrischer Kreisel: alle J_{η} verschieden
- (ii) Symmetrischer Kreisel: zwei der J_{η} gleich
- (iii) Kugelkreisel: alle J_{η} gleich

(3) Hauptachsen $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$ bilden Orthogonalsystem

(4) Symmetrischer Kreisel ($J_I = J_{II} \neq J_{III}$): $\vec{e}_{III} \hat{=} \text{Symmetrieachse}$
 „Figurenachse“

Drehimpuls in Σ_L :

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_L &= \sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_{iL}}_{=\vec{r}_0 + \vec{r}_i} \times \underbrace{\dot{\vec{r}}_{iL}}_{=\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i} \\
 &= \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
 &= M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times M \vec{R}_K) + M \vec{R}_K \times \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{=: \vec{L}} \\
 &\hspace{15em} \text{Drehimpuls in } \Sigma_K
 \end{aligned}$$

Wählen Σ_K so, dass

(i) $\vec{r}_0(t) \equiv 0$ (falls ein Punkt des Körpers raumfest): $\vec{L}_L = \vec{L}$

oder

(ii) $\vec{R}_K(t) \equiv 0$ (sonst): $\vec{L}_L = \underbrace{\vec{r}_0 \times M \dot{\vec{r}}_0}_{\text{„Bahndrehimpuls“}} + \underbrace{\vec{L}}_{\text{„Eigendrehimpuls“}}$

Eigendrehimpuls:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)} \\ &= \vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\end{aligned}$$

Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned}L_\alpha &= \sum_i m_i \left(\omega_\alpha \underbrace{\vec{r}_i^2}_{\sum_{\beta=1}^3 \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta} - x_{i\alpha} \sum_{\beta=1}^3 x_{i\beta} \omega_\beta \right) \\ &= \sum_{\beta=1}^3 \underbrace{\sum_i m_i (\vec{r}_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta})}_{J_{\alpha\beta}} \omega_\beta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \hat{J} \vec{\omega}}$$

Rotationsenergie:

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \hat{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

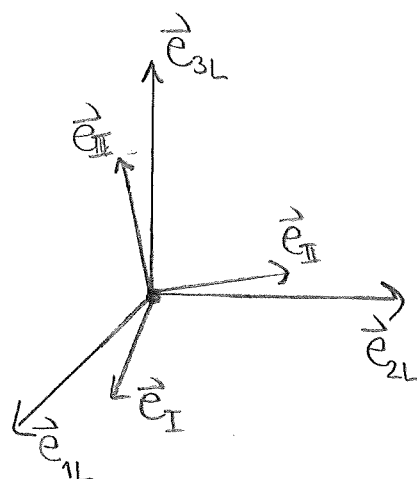
Folgerung:

Eigendrehimpuls $\vec{L}$ ist im Allg. nicht parallel zur momentanen Drehachse
(Ausnahme: Drehung um Hauptachse $\vec{e}_\eta \Rightarrow \vec{L} = \hat{J} \vec{\omega} = \underbrace{\omega \vec{e}_\eta}_{\omega \vec{e}_\eta} = \underbrace{\omega \hat{J} \vec{e}_\eta}_{J_\eta \vec{e}_\eta} = J_\eta \vec{\omega}$)

4.3 Bewegungsgleichungen des starren Körpers

74

Annahme: Ein Punkt P des Körpers sei raumfest.
Wählen Σ_K so, dass $\vec{r}_o(t) \equiv 0$ und
 $\vec{e}_i \equiv \vec{e}_\eta$ (Hauptachsen).



Drehimpulssatz in Σ_L :

$$\vec{M} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma_L} \vec{L}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma_K} \vec{L} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \text{mit } \vec{L} = \hat{J} \vec{\omega}$$

$$= \hat{J} \left(\frac{d}{dt} \right)_{\Sigma_K} \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\hat{J} \vec{\omega}) \quad \text{mit } \hat{J} = \begin{pmatrix} J_I & 0 & 0 \\ 0 & J_{II} & 0 \\ 0 & 0 & J_{III} \end{pmatrix} \text{ diagonal}$$

Euler-Gleichungen in Σ_K :

$$M_I = J_I \dot{\omega}_I + (J_{III} - J_{II}) \omega_{II} \omega_{III}$$

$$M_{II} = J_{II} \dot{\omega}_{II} + (J_I - J_{III}) \omega_{III} \omega_I$$

$$M_{III} = J_{III} \dot{\omega}_{III} + (J_{II} - J_I) \omega_I \omega_{II}$$

Beispiel (kräftefreier symmetrischer Kreisel):

$$\vec{M} = 0 \quad \text{und} \quad J_I = J_{II} \neq J_{III}$$

$$0 = J_I \dot{\omega}_I + (J_{III} - J_I) \omega_{II} \omega_{III}$$

$\Rightarrow$

$$0 = J_{II} \dot{\omega}_{II} - (J_{III} - J_I) \omega_{III} \omega_I$$

$$0 = J_{III} \dot{\omega}_{III}$$

$$\Rightarrow \omega_{III} = \text{konst} =: \omega_0$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{\omega}_I + \Omega \omega_{II}$$

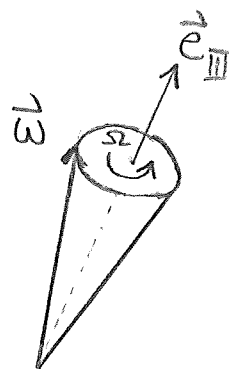
$$\text{mit } \Omega := \frac{J_{III} - J_I}{J_I} \omega_0$$

$$0 = \dot{\omega}_{II} - \Omega \omega_I$$

$$\Rightarrow \omega_I = \alpha \cos(\Omega t + \beta)$$

$$\omega_{II} = \alpha \sin(\Omega t + \beta)$$

$$\omega_{III} = \omega_0$$



Interpretation:

In Σ_K : Momentane Drehachse $\vec{\omega}(t)$ umläuft auf Kegelmantel mit Winkelgeschwindigkeit Ω die Figurenachse

In Σ_L : Figurenachse rotiert um raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L} = \text{konst.}$
 $\vec{\omega}(t)$ entsteht aus Überlagerung der Rotationen um $\vec{e}_{III}$ und $\vec{L}$.

„Notation“

Anwendung (Polbewegung der Erde):

(76)

$$\text{Erdausplattung: } \frac{J_{\text{III}} - J_{\text{I}}}{J_{\text{I}}} \approx \frac{a-b}{a} \approx 0.33\%$$

Kreisbewegung des kinematischen Nordpols (momentane Drehachse $\vec{\omega}$)
um geometrischen Nordpol (Figurenachse $\vec{e}_{\text{III}}$) mit Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} / \left(\frac{a-b}{a} \right) \approx 300 \text{ d}$$

Experimenteller Nachweis: S.C. Chandler 1891 ($T_{\text{exp}} = 435 \text{ d}$)