

5 Lagrange-Formalismus

5.1 Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen: Geometrische Einschränkungen der Bewegung

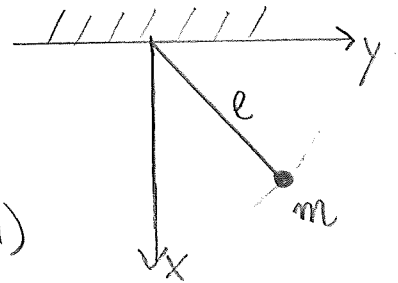
Zwangskräfte: Kräfte, die die Einhaltung der Zwangsbedingung bewirken

Beispiel (Fadenpendel):

Zwangsbedingung: $x^2 + y^2 = \ell^2$

Zwangskraft: $\vec{Z} = \vec{F}_F = -F_F \vec{e}_r$ (Kap. 2.4)

Bewegungsgleichung: $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$
 ↑
 eingeprägte Kraft



Klassifikation (Zwangsbedingungen):

(1) Holonome Zwangsbedingung: $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$

(a) holonom-skleronom: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

(b) holonom-rheonom: $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$

(2) Nicht-holonome Zwangsbedingung: nicht in Form $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$ darstellbar

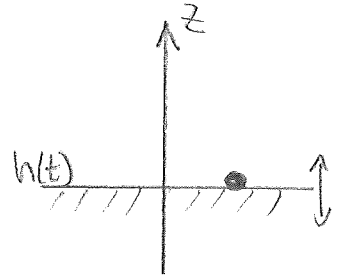
Beispiele:

- Starrer Körper : $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \stackrel{!}{=} c_{ij} = \text{konst.}$

$\Rightarrow$ holonom-scleronome Zwangsbed. mit $f_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) := |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - c_{ij}$

- Teilchen auf langsam beschleunigter Platte : $z \stackrel{!}{=} h(t)$ falls $\ddot{h}(t) \geq -g$

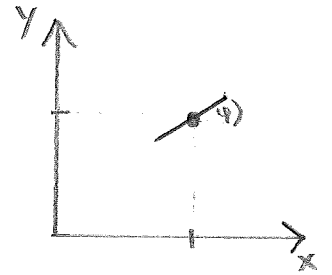
$\Rightarrow$ holonom-rheonome Zwangsbed. mit $f(\vec{r}, t) := z - h(t)$



- Teilchen auf schnell abbremsender Platte : $z \geq h(t)$

$\Rightarrow$ nicht-holonomie Zwangsbed.

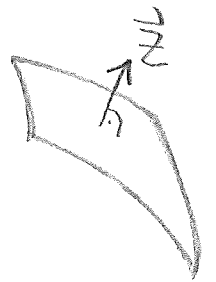
- Schlittschuh auf Eisbahn : $\tan \varphi \stackrel{!}{=} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$



5.2 Lagrange-Gleichungen erster Art

Annahme: Teilchen mit holonomer Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = 0$

$$\Rightarrow \vec{Z} \parallel \vec{\nabla} f$$



Beispiel (Punktmasse auf Kugeloberfläche) : $f(r, \vartheta, \varphi) = r^2 - R^2$

$$\Rightarrow \vec{Z} \parallel \vec{\nabla} f = 2r \vec{e}_r \text{ senkrecht auf Oberfläche}$$

Zwangskraft auf i-tes Teilchen : $\vec{Z}_i = \sum_{v=1}^p \lambda_v \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$

mit $p \leq 3N-1$

Lagrange-Gleichungen erster Art:

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i = \vec{F}_i + \sum_{v=1}^p \lambda_v \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f_v \quad i=1, \dots, N$$

$$f_v(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad v=1, \dots, p$$

"Lagrange-I"

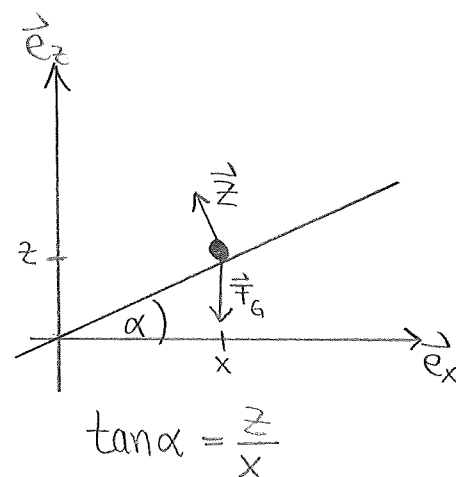
Bemerkungen:

- Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte ($3N+p$)
- Lagrange-Multiplikatoren λ_v im Allg. von Lösung abhängig

Beispiel (Bewegung auf schiefer Ebene):

Zwangsbedingung: $f(\vec{r}) = x \tan \alpha - z = 0$

Zwangskraft: $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f$
 $= \lambda (\vec{e}_x \tan \alpha - \vec{e}_z)$



Lagrange-I:

$$m \ddot{\vec{r}} = m \vec{g} + \lambda (\vec{e}_x \tan \alpha - \vec{e}_z)$$

Lösung:

$$\Rightarrow m \ddot{x} = \lambda \tan \alpha$$

$$m \ddot{z} = -mg - \lambda \Rightarrow \lambda = -mg - m \ddot{z} = -\ddot{x} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x} \underbrace{(1 + \tan^2 \alpha)}_{= 1/\cos^2 \alpha} = -g \underbrace{\tan \alpha}_{\sin \alpha / \cos \alpha} \Rightarrow \ddot{x} = -g \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{g}{2} \sin \alpha \cos \alpha t^2 + v_0^x t + x_0$$

$$z(t) = -\frac{g}{2} \sin^2 \alpha t^2 + v_0^x \tan \alpha t + x_0 \tan \alpha t$$

Zwangskraft:

$$\lambda = -mg - m \ddot{x} \tan \alpha$$

$$= -mg \underbrace{(1 - \sin^2 \alpha)}_{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f = -mg \cos \alpha (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow |\vec{Z}| = mg \cos \alpha \quad \text{kompensiert gerade Komponente von } \vec{F}_G \text{ senkrecht zur Ebene} \\ \text{(Spezialfall!)}$$

5.3 Generalisierte Koordinaten

Anzahl Freiheitsgrade: System von N Punktmassen mit p holonomem Zwangsbedingungen hat $f := 3N - p$ Freiheitsgrade

Generalisierte Koordinaten: Minimaler Satz an unabhängigen Koordinaten $q_k, k=1, \dots, f$, sodass Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind.

Generalisierte Geschwindigkeiten: $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}, k=1, \dots, f$

Beispiele:

- Punktwasse auf Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow N=1, p=1 \Rightarrow f=2$

Generalisierte Koordinaten: $q_1 = \varphi$, $q_2 = \vartheta$ mit

$$x = R \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = R \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \vartheta$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ für alle } \vartheta, \varphi$$

- Starrer Körper: $f=6$

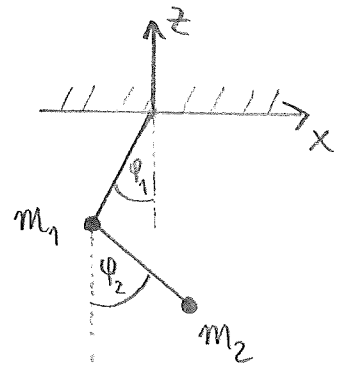
Generalisierte Koordinaten: Schwerpunktskoordinaten, Drehwinkel von Σ_K bezgl. Σ_L ("Euler-Winkel")

- Ebenes Doppelpendel:

$$p = 2 \text{ (ebene Bewegung)} + 2 \text{ (konstante Abstände)}$$

$$f = 3N - p = 2$$

Generalisierte Koordinaten: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$



5.4 D'Alembertsches Prinzip

Virtuelle Verschiebung: Fiktive instantane Verschiebung $\delta \vec{r}_i$ des i -ten Teilchens, welche die Zwangsbedingungen, aber nicht notwendigerweise die Bewegungsgleichungen, erfüllt.

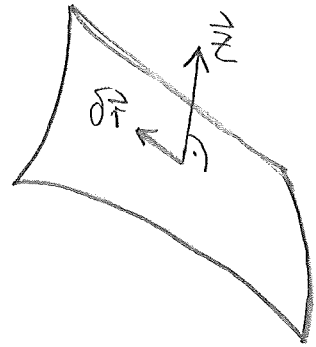
Prinzip der virtuellen Arbeit:

Zwangskräfte leisten unter virtuellen Verschiebungen keine Arbeit

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Begründung:

$$\vec{Z} \perp \delta \vec{r} \Rightarrow \vec{Z} \cdot \delta \vec{r} = 0$$



Bemerkung: Prinzip der virtuellen Arbeit kann als Axiom der Mechanik mit Zwangsbedingungen aufgefasst werden.

d'Alembertsches Prinzip:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Begründung:

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$$

Folgerung (Gleichgewichtsprinzip der Statik):

Für statische Probleme ($\dot{\vec{r}}_i \equiv 0$) gilt:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die eingepägten Kräfte keine Arbeit unter virtuellen Verschiebungen leisten.

Virtuelle Verschiebungen (generalisierte Koord.):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \Rightarrow \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

d'Alembertsches Prinzip (generalisierte Koord.):

$$(1) \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f Q_k \delta q_k \quad \text{mit } Q_k := \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^f m_i \underbrace{\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}_{\substack{\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}}} \delta q_k \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ &\quad \left(\text{da } \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

$$\stackrel{(1)=(2)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0$$

$$\stackrel{q_k \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0 \quad \text{für } k=1, \dots, f}$$

5.5 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Annahme: Eingeprägte Kräfte durch (verallg.) Potential darstellbar: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$

$$\Rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N (-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_{i\alpha}} \frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\text{mit } V = V(q_1, \dots, q_f, t)$$

Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, \dots, f}$$

"Lagrange-II"

mit der "Lagrange-Funktion"

$$L := T - V$$

Beweis: $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial q_k} = -Q_k$

Bemerkungen:

- (1) Lagrange-II stellt einfachste Form der Bewegungsgleichungen für Systeme mit holonomem Zwangsbed. und Kräfte mit verallg. Potentialen dar.
- (2) Für konservative Kräfte gilt $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$
- (3) Lagrange-II für geschwindigkeitsabhängige verallg. Potentiale verallgemeinerbar (Bsp.: elektromagnetisches Potential)

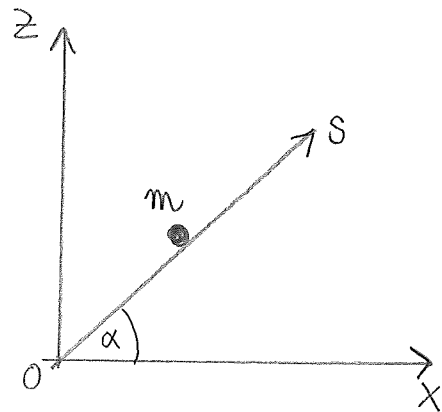
Beispiele:

(A) Bewegung auf schiefer Ebene

(i) Generalisierte Koordinate: $q_1 := s$ mit

$$x = s \cos \alpha$$

$$z = s \sin \alpha$$



(ii) Lagrange-Funktion:

$$L = T - V$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - m g z$$

$$= \frac{m}{2} \dot{s}^2 - m g s \sin \alpha$$

(iii) Lagrange-II:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}}}_{m \dot{s}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial s}}_{-m g \sin \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} + g \sin \alpha = 0$$

(iv) Lösung: $s(t) = -\frac{g}{2} \sin \alpha t^2 + \dot{s}(0)t + s(0)$

86

17.VL

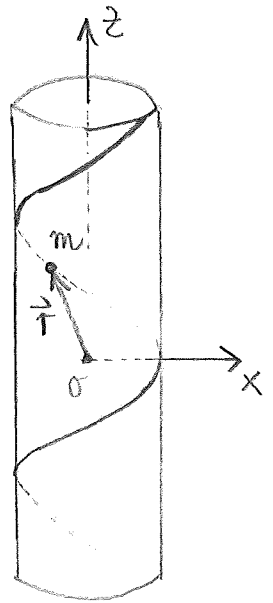
(B) Bewegung auf Helix mit $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$

(i) Generalisierte Koordinate: $q_1 = \varphi$ mit

$$x = R \cos \varphi$$

$$y = R \sin \varphi$$

$$z = \alpha \varphi, \quad \alpha = \text{konst.}$$



(ii) Lagrange-Funktion:

$$L = T - V$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \frac{m}{2} (R^2 + \alpha^2) \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2} (R^2 + \alpha^2 \varphi^2)$$

(iii) Lagrange-II:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}}_{m(R^2 + \alpha^2) \dot{\varphi}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{-k\alpha^2 \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{k}{m} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + R^2} \varphi = 0$$

(iv) Lösung: $\varphi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + R^2}}$

Harmonische Schwingung auf der Helix

5.6 Hamiltonsches Wirkungsprinzip

87

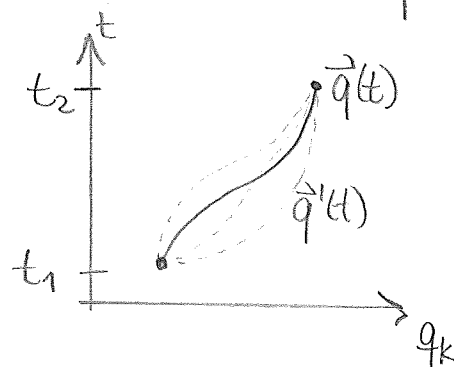
Wirkungsfunktional:

$$S[\vec{q}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \quad \text{mit } \vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$$

Hamilton'sches Wirkungsprinzip:

Die vom System durchlaufene Bahnkurve ist gegenüber anderen denkbaren Bahnkurven für gegebenen Anfangs- und Endpunkt $\vec{q}(t_1)$ und $\vec{q}(t_2)$ dadurch ausgezeichnet, dass das Wirkungsfunktional $S[\vec{q}(t)]$ einen Extremwert annimmt:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$



Beweis:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{[L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)]}_{\text{Variation}} dt \quad \text{mit } \vec{q}' = \vec{q} + \delta \vec{q}$$

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^f \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k}_{=0 \text{ (Lagrange-II)}} \right] dt$$

= 0 (Lagrange-II)

$$= \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \text{da } \delta q_k(t_2) = \delta q_k(t_1) = 0$$

(88)

Bemerkungen:

- Wirkungsprinzip kann als Grundprinzip der klassischen Mechanik aufgefasst werden
- Analoges Prinzip in Strahlenoptik: Fermatsches Prinzip (Prinzip der kürzesten Laufzeit)
- Ausgangspunkt für anschauliches Verständnis der Quantenmechanik: Quantenfluktuationen ermöglichen Abweichungen von der klassischen Bahnkurve $\Rightarrow$ Superposition aller Pfade mit Gewichtung $e^{iS[\vec{q}(t)]}$ (Feynmansches Pfadintegral)
- Ausgangspunkt für Suche nach der "Weltformel"