

6 Hamilton-Mechanik

89

6.1 Generalisierte Impulse und Hamilton-Funktion

Generalisierte Impulse: $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

Hamilton-Funktion: $H := \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L$

Beispiel (Punktmasse im konservativen Kraftfeld):

Generalisierte Koordinaten: $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$

Lagrange-Funktion: $L = T - V = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k^2 - V(q_1, q_2, q_3)$

Generalisierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k$

Hamilton-Funktion: $H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L$

$$= \sum_k \frac{p_k^2}{m} - \frac{1}{2} \sum_k \frac{p_k^2}{m} + V(q_1, q_2, q_3)$$

$$= \sum_k \frac{p_k^2}{2m} + V(q_1, q_2, q_3)$$

$$= T + V$$

Bemerkung: Für holonom-skleronomie Zwangsbedingungen und konservative eingetragte Kräfte gilt allgemein

$$H = T + V$$

Erhaltung des generalisierten Impulses:

90

$$\boxed{\frac{dp_k}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

" q_k zyklische Koordinate"

Beweis:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{Lagrange-II})$$

Erhaltung der Hamilton-Funktion:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{d}{dt} (p_k \dot{q}_k)}_{\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k} - \underbrace{\frac{d}{dt} L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}_{\sum_{k=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\dot{p}_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}} \\ &= \dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k - \sum_{k=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\dot{p}_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

6.2 Kanonische Gleichungen

91

Annahme: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ lässt sich eindeutig nach $\dot{q}_k$ auflösen

$\Rightarrow$ eliminieren $\dot{q}_k$ in H zugunsten von p_k :

$$H = H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$$

Dann:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) \right]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_k} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\substack{= + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ (L-II)} \\ = + \dot{p}_k}} \bigg|_{\vec{q} \text{ fest}} - \sum_{l=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}}_{= p_l} \bigg|_{\vec{q} \text{ fest}} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_k} \\ &= -\dot{p}_k \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial p_k} - \sum_{l=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}}_{p_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

Kanonische Gleichungen:

92

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k=1, \dots, f$$

" p_k und q_k kanonisch konjugierte Variable"

Bewertungen:

(1) Erhaltung des general. Impulses $\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

(2) Erhaltung der Hamilton-Funktion $\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Beweis:
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{e=1}^f p_e \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial t} - \sum_{e=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e}}_{p_e} \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \quad (\text{Kap. 6.1})$$

(3) Erhaltungssätze Spezialfälle des Noether-Theorems:

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße

Beispiele: Translationssymmetrie $\Rightarrow$ Impulserhaltung

Homogenität der Zeit $\Rightarrow$ Energieerhaltung